§4. Opérateurs Positifs

Opérateurs linéaires positifs

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que A est un opérateur positif et que l'on note $A \geq 0$, si pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Proposition 1

Soient A_1 et A_2 deux opérateurs linéaires positifs définis sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, toute combinaison linéaire $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ à coefficients réels positifs $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ est un opérateur positif.

Démonstration

En effet, pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\varphi, \varphi \rangle = \alpha_1 \langle A_1\varphi, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle A_2\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Proposition 2

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, A est un opérateur auto adjoint

Démonstration

En effet, car l'opérateur A est auto adjoint si et seulement si pour tout $\varphi \in H$, on a $\langle A\varphi, \varphi \rangle$ un réel.

Comparaison des opérateurs

Soient A et B deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que $A \geq B$ si la différence $A - B$ est un opérateur positif. Autrement dit, pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle (A - B)\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

Lemme 1

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, les opérateurs AA^* et A^*A sont des opérateurs positifs.

En effet, il suffit de voir que pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\begin{aligned}\langle A^*A\varphi, \varphi\rangle &= \langle A\varphi, A\varphi\rangle \\ &= \|A\varphi\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\langle AA^*\varphi, \varphi\rangle &= \langle A^*\varphi, A^*\varphi\rangle \\ &= \|A^*\varphi\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Corollaire 1

Soit A un opérateur linéaire auto adjoint défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur carré A^2 est un opérateur positif.

En effet, en vertu du lemme 1, on a $A^2 = A^*A = AA^*$ un opérateur positif.

Théorème 1

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur puissance A^n est un opérateur positif pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

En effet, il est connu que si A est auto adjoint alors A^n est auto adjoint avec $n \in \mathbb{N}$. D'où pour tout $\varphi \in H$ et pour tout exposant pair $n = 2m$, on a

$$\begin{aligned}\langle A^n\varphi, \varphi\rangle &= \langle A^mA^m\varphi, \varphi\rangle \\ &= \langle A^m\varphi, (A^m)^*\varphi\rangle \\ &= \langle A^m\varphi, A^m\varphi\rangle \\ &= \|A^m\varphi\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

En outre, si l'exposant est impair $n = 2m + 1$, on a

$$\begin{aligned}\langle A^n\varphi, \varphi\rangle &= \langle A^mAA^m\varphi, \varphi\rangle \\ &= \langle A(A^m\varphi), A^m\varphi\rangle \\ &= \langle A\psi, \psi\rangle \geq 0, \quad \text{avec} \quad \psi = A^m\varphi.\end{aligned}$$

Proposition 3

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, toute combinaison linéaire

$$P(A) = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + ...\alpha_n I,$$

des puissances A^n à coefficients réels positifs $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \geq 0$ est un opérateur positif.

Démonstration

En effet, en vertu du théorème 1 et de la proposition 1, on a $P(A)$ un opérateur positif.

Théorème 2 (Théorème de Cauchy Schwartz généralisé)

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, pour tout $\varphi, \psi \in H$, on a la relation suivante

$$|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi\rangle \langle A\psi, \psi\rangle .$$

Démonstration

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in H$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle \geq 0.$$

De plus, il vient

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda} \langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda \langle A\psi, \varphi\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle A\psi, \psi\rangle .$$

D'où, avec A auto adjoint, on écrit

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda} \langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda \langle \psi, A\varphi\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle A\psi, \psi\rangle ,$$

ou encore

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda} \langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda\overline{\langle A\varphi, \psi\rangle} + \lambda\overline{\lambda} \langle A\psi, \psi\rangle .$$

Prenons $\lambda = \dfrac{\langle A\varphi, \psi\rangle}{\langle A\psi, \psi\rangle}$, on obtient

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} + {\frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|}{(\langle A\psi, \psi\rangle)^2}}^2 \langle A\psi, \psi\rangle \geq 0$$

ou encore

$$\langle A\varphi,\varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi,\psi\rangle|^2}{\langle A\psi,\rangle\,\psi} \geq 0.$$

D'où le résultat voulu

$$|\langle A\varphi,\psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi,\varphi\rangle \langle A\psi,\psi\rangle$$

Théorème 3

Soit A_n une suite croissante d'opérateurs linéaires auto adjoints définis sur un espace de Hilbert H dans lui même, si les normes $\|A_n\|$ sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, il existe un opérateur linéaire continu A tel que pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\lim_{n\to\infty} A_n\varphi = A\varphi.$$

Autrement dit, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $M > 0$ tel que $\|A_n\| \leq M$ alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} A_n\varphi = A\varphi.$$

De plus

$$\|A\| \leq M.$$

Démonstration

La suite d'opérateurs A_n est croissante dans le sens où l'on a, pour tout $n \geq m$, l'opérateur $(A_n - A_m)$ est positif. C'est à dire, pour tout $\varphi \in H$, on a la relation suivante

$$\langle (A_n - A_m)\varphi,\varphi\rangle \geq 0,$$

ou encore

$$\langle A_n\varphi,\varphi\rangle - \langle A_m\varphi,\varphi\rangle \geq 0.$$

D'où, on écrit

$$\begin{array}{rcl} |\langle A_n\varphi,\varphi\rangle| & \leq & \|A_n\varphi\| \, \|\varphi\| \\ & \leq & \|A_n\| \, \|\varphi\|^2 \\ & \leq & M \, \|\varphi\|^2 . \end{array}$$

Autrement dit, la suite $\langle A_n\varphi,\varphi\rangle$ est une suite numérique croissante bornée. Donc convergente.

D'autre part, en vertu du théorème 2, on a

$$\begin{aligned}
\left|\langle A_n\varphi - A_m\varphi, \psi\rangle\right|^2 &= \left|\langle (A_n - A_m)\varphi, \psi\rangle\right|^2 \\
&\leq \langle A_n - A_m)\varphi, \varphi\rangle \langle A_n - A_m)\psi, \psi\rangle \\
&= \left(\langle A_n\varphi, \varphi\rangle - \langle A_m\varphi, \varphi\rangle\right)\left(\langle A_n - A_m)\psi, \psi\rangle\right) \\
&\leq \left(\|A_n - A_m\| \|\psi\|^2\right)\left(\langle A_n\varphi, \varphi\rangle - \langle A_m\varphi, \varphi\rangle\right) \\
&\leq 2M \|\psi\|^2 (2\varepsilon).
\end{aligned}$$

Prenons le cas particulier où $\psi = A_n\varphi - A_m\varphi$, on obtient

$$\left|\langle A_n\varphi - A_m\varphi, \psi\rangle\right|^2 = \|A_n\varphi - A_m\varphi\|^4 \leq 2M \|A_n\varphi - A_m\varphi\|^2 (2\varepsilon),$$

ce qui donne après simplification

$$\|A_n\varphi - A_m\varphi\|^2 \leq 4M\varepsilon.$$

D'où la suite A_n est de Cauchy dans l'espace de Hilbert H. Donc elle est convergente vers un opérateur A.

$$\lim_{n\to\infty} A_n\varphi = A\varphi.$$

Il est aisé de voir que l'opérateur A est linéaire et continu car, on a

$$\|A_n\varphi\| \leq \|A_n\| \|\varphi\| \leq M \|\varphi\|,$$

par passage à la limite des deux membres, il vient

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n\varphi\| = \|A\varphi\| \leq M \|\varphi\|,$$

ou encore

$$\|A\| \leq M.$$

Lemme 2

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même de norme $\|A\| \leq 1$ alors, l'opérateur $B = I - A$ est un opérateur positif de norme $\|B\| \leq 1$.

Démonstration

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\langle B\varphi, \varphi\rangle &= \langle (I-A)\varphi, \varphi\rangle \\
&= \langle \varphi, \varphi\rangle - \langle A\varphi, \varphi\rangle \\
&\geq \|\varphi\|^2 - \|A\varphi\|\,\|\varphi\| \\
&\geq \|\varphi\|^2 - \|A\|\,\|\varphi\|^2 \\
&= (1-\|A\|)\,\|\varphi\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

De plus, en vertu du théorème 2, on écrit

$$\begin{aligned}
|\langle B\varphi, \psi\rangle|^2 &\leq \langle B\varphi, \varphi\rangle \langle B\psi, \psi\rangle \\
&= (\langle \varphi, \varphi\rangle - \langle A\varphi, \varphi\rangle)(\langle \psi, \psi\rangle - \langle A\psi, \psi\rangle) \\
&\leq (\langle \varphi, \varphi\rangle)(\langle \psi, \psi\rangle) \\
&= \|\varphi\|^2\,\|\psi\|^2
\end{aligned}$$

Prenons le cas particulier où $\psi = B\varphi$, on obtient

$$|\langle B\varphi, \psi\rangle|^2 = \|B\varphi\|^4 \leq \|\varphi\|^2\,\|B\varphi\|^2,$$

ce qui donne après simplification

$$\|B\varphi\| \leq \|\varphi\|,$$

ou encore

$$\|B\| \leq 1.$$

Lemme 3

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même de norme $\|A\| \leq 1$ alors, la suite récurrente d'éléments U_n définie par

$$U_1 = 0, \qquad U_{n+1} = \frac{1}{2}(I - A + U_n^2) = \frac{1}{2}(B + U_n^2), \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N},$$

converge vers un opérateur linéaire continu U de norme $\|U\| \leq 1$, ou encore

$$\lim_{n\to\infty} U_n\varphi = U\varphi \quad \textit{tel que} \quad \|U\| \leq 1.$$

Démonstration

En effet, d'après le théorème 3, il suffit de montrer que la suite d'éléments U_n est croissante et de normes bornées $\|U_n\| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Compte tenu du lemme 2, l'opérateur $B = I - A$ est positif, de norme bornée $\|B\| \leq 1$. D'où, on vérifie par récurrence que les normes $\|U_n\| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, supposons que $\|U_n\| \leq 1$ alors, on a

$$\begin{aligned}
\|U_{n+1}\| &= \frac{1}{2}\left\|B + U_n^2\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}(\|B\| + \left\|U_n^2\right\|) \\
&\leq \frac{1}{2}(\|B\| + \|U_n\|^2) \\
&\leq \frac{1}{2}(1 + 1^2) = 1.
\end{aligned}$$

Il est à noter que d'après la proposition 3, les éléments U_n sont positifs comme suite de polynômes d'opérateurs positifs en B à coefficients positifs $U_n = P(B)$. D'où, on démontre par récurrence que la suite U_n est croissante, ou encore l'opérateur $U_{n+1} - U_n$ est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, supposons que l'on a $U_n - U_{n-1} \geq 0$ alors, on a

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{2}(B + U_n^2) - \frac{1}{2}(B + U_{n-1}^2) \\
&= \frac{1}{2}(U_n^2 - U_{n-1}^2).
\end{aligned}$$

Comme la suite U_n est un polynôme d'opérateur positif à coefficients positifs alors, les éléments de cette suite commutent entre eux, c'est à dire

$$U_p U_q = U_q U_p, \quad \text{pour tout} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

D'où, on écrit

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n^2 - U_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-1})(U_n - U_{n-1}) \geq 0.$$

L'opérateur $U_{n+1} - U_n$ est positif comme produit de deux opérateurs positifs, le premier somme de deux opérateurs positifs $\frac{1}{2}U_n$ et $\frac{1}{2}U_{n-1}$, le second $U_n - U_{n-1}$ est positif par supposition de récurrence pour une valeur n. D'où, l'existence d'un opérateur linéaire U tel que

$$\lim_{n \to \infty} U_n \varphi = U\varphi \quad \textit{avec} \quad \|U\| \leq 1.$$

Lemme 4

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même de norme $\|A\| \leq 1$ alors, tout opérateur linéaire borné D commute avec A il commute avec la suite des opérateurs

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(I - A + U_n^2), \quad U_1 = 0,$$

et il commute avec l'opérateur U limite de la suite

$$\lim U_n \varphi = U\varphi$$

Autrement dit

$$AD = DA \quad \textit{implique} \;\; U_n D = DU_n \;\; \textit{et} \; UD = DU \;\; \textit{avec} \;\; U\varphi = \lim U_n \varphi.$$

Démonstration

Soit D un opérateur linéaire borné, commutant avec A alors cet opérateur commute aussi avec $B = I - A$, c'est à dire

$$AD = DA \;\; \textit{implique} \;\; BD = DB.$$

De plus, il est aisé de vérifier par récurrence que l'opérateur D commute avec les opérateurs $U_{n+1} = \frac{1}{2}(B + U_n^2)$, supposons que l'on a $DU_n = U_n D$ alors, on écrit

$$\begin{aligned}
DU_{n+1} &= \frac{1}{2}D(B + U_n^2) \\
&= \frac{1}{2}(DB + DU_n^2) = \frac{1}{2}(BD + DU_nU_n) \\
&= \frac{1}{2}(BD + U_nDU_n) = \frac{1}{2}(BD + U_n^2 D) \\
&= \frac{1}{2}(B + U_n^2)D \\
&= U_{n+1}D
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\begin{aligned}
DU\varphi &= D(\lim U_n \varphi) \\
&= \lim DU_n \varphi = \lim U_n D \varphi \\
&= UD\varphi.
\end{aligned}$$

Opérateur racine carrée

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur positif R est dit racine carrée de l'opérateur A si, on a la relation

$$A = R^2 \quad \text{ou encore} \quad R = \sqrt{A}$$

Théorème 4

Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur A admet une racine carrée positif unique $R = \sqrt{A}$. De plus, l'opérateur R commute avec tout opérateur commutant avec l'opérateur A. Autrement dit, pour tout opérateur linéaire borné D tel que $AD = DA$, on a

$$RD = DR \quad \textit{ou encore} \quad \sqrt{A}D = D\sqrt{A}.$$

Démonstration

- *Existence*

En effet, on peut admettre que la norme $\|A\| \leq 1$. Il est clair que l'opérateur A commute avec lui même. D'où en vertu du lemme 4, l'opérateur A commute avec les éléments de la suite U_n telle que

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(I - A + U_n^2), \quad U_1 = 0.$$

Prenons $D = U_n$, compte tenu du lemme 4, l'opérateur U_n commute avec l'opérateur limite $U\varphi = \lim U_n\varphi$ pour tout $\varphi \in H$, c'est à dire $U_nU = UU_n$ avec $\|U_n\| \leq 1$ et $\|U\| \leq 1$. D'où, il vient

$$\begin{array}{rcl} \left\|U_n^2\varphi - U^2\varphi\right\| & = & \|(U_n + U)(U_n - U)\varphi\| \\ & \leq & \|U_n + U\| \, \|U_n\varphi - U\varphi\| \\ & \leq & 2\,\|U_n\varphi - U\varphi\| \leq \varepsilon. \end{array}$$

Autrement dit, la suite $U_n^2\varphi$ converge vers $U^2\varphi$, c'est à dire $\lim U_n^2\varphi = U^2\varphi$ et par conséquent, il est aisé de trouver la limite de la suite récurrente U_{n+1}. D'où, pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\lim_{n\to\infty} U_{n+1}\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(I - A + U_n^2)\varphi,$$

Donc, il vient

$$U\varphi = \frac{1}{2}(I - A + U^2)\varphi,$$

ou encore

$$(I-2U+U^2)\varphi = A\varphi.$$

Prenons l'opérateur $R = I-U$ ce dernier est un opérateur linéaire positif racine carré de l'opérateur A car, on a

$$R^2 = (I-U)^2 = A,$$

ou encore

$$R = I - U = \sqrt{A}.$$

D'où, l'existence de l'opérateur racine carré $\sqrt{A}$.

- *Unicité*

Soient R_1 et R_2 deux opérateurs racines carrées de l'opérateur positif A, ces deux opérateurs commutent avec A alors, elles se commutent entre elles, c'est à dire

$$R_1^2 = R_2^2 = A \Rightarrow R_1R_2 = R_2R_1$$

Les opérateurs R_1 et R_2 étant positifs alors, il existent deux opérateurs racines carrées S_1 et S_2 telles que

$$S_1^2 = R_1 \quad \text{et} \quad S_2^2 = R_2.$$

De plus, pour tout φ, $\psi \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\|S_1\psi\|^2 + \|S_2\psi\|^2 &= \langle S_1\psi, S_1\psi\rangle + \langle S_2\psi, S_2\psi\rangle \\
&= \left\langle S_1^2\psi, \psi\right\rangle + \left\langle S_2^2\psi, \psi\right\rangle \\
&= \langle R_1\psi, \psi\rangle + \langle R_2\psi, \psi\rangle \\
&= \langle (R_1+R_2)\psi, \psi\rangle
\end{aligned}$$

Prenons la cas où $\psi = (R_1 - R_2)\varphi$ alors, il vient

$$\begin{aligned}
\|S_1\psi\|^2 + \|S_2\psi\|^2 &= \langle (R_1+R_2)\psi, \psi\rangle \\
&= \langle (R_1+R_2)(R_1-R_2)\varphi, \psi\rangle \\
&= \left\langle (R_1^2-R_2^2)\varphi, \psi\right\rangle \\
&= \langle (A-A)\varphi, \psi\rangle = 0
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$S_1\psi = S_2\psi = 0.$$

La composition du premier membre par l'opérateur S_1 et le second par S_2 nous donne

$$S_1^2\psi = S_1(S_1\psi) = 0 \text{ et } \quad S_2^2\psi = S_2(S_2\psi) = 0.$$

Autrement dit, on obtient

$$R_1\psi = R_2\psi = 0,$$

ou encore

$$(R_1 - R_2)\psi = 0.$$

D'où, pour tout $\varphi \in H$, on écrit

$$\begin{aligned} \|(R_1 - R_2)\varphi\|^2 &= \langle (R_1 - R_2)\varphi, (R_1 - R_2)\varphi \rangle \\ &= \langle (R_1 - R_2)(R_1 - R_2)\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle (R_1 - R_2)\psi, \varphi \rangle = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne par la suite $\|(R_1 - R_2)\varphi\| = 0$. Autrement dit, l'expression

$$(R_1 - R_2)\varphi = 0,$$

ou encore

$$R_1 = R_2.$$

D'où l'unicité de l'opérateur racine carré $\sqrt{A}$.

Théorème 5

Soient A et B deux opérateurs linéaires positifs définis sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, pour que l'opérateur produit AB soit un opérateur positif il faut et il suffit qu'ils commutent, c'est à dire $AB = BA$.

Démonstration

En effet, en vertu du théorème 4, l'opérateur $R = \sqrt{A}$ commute avec l'opérateur B, c'est à dire $RB = BR$. D'ou pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle AB\varphi, \varphi \rangle &= \left\langle R^2 B\varphi, \varphi \right\rangle \\ &= \langle RB\varphi, R\varphi \rangle \\ &= \langle B(R\varphi), R\varphi \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\langle AB\varphi, \varphi \rangle \geq 0,$$

ou encore

$$AB \geq 0.$$

Bibliographie

[1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir Moscou 1981.

[2] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill New York 1973.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Laboratory of Pure and Applied Mathematics
and
Laboratory of Signals Analysis and Systems
University of Msila
28000 ALGERIA

E-mail. mostefanadir@yahoo.fr