§1. Opérateurs Continus

Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- *Condition additive*

$$\forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in E,\ \text{on a}\ \ A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E,\ \lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \text{on a}\ \ A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.

Théorème 1

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G.

Démonstration

Soit x_n une suite convergente vers x alors, cette suite peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0), \\ &= y_n + (x - x_0). \end{aligned}$$

Il est clair que la suite y_n est une suite convergente vers l'élément x_0

$$\lim y_n = \lim[x_0 + (x_n - x)] = x_0,$$

la composition des deux membres par l'opérateur A, donne

$$\begin{aligned} A(x_n) &= A(x_0 + (x_n - x)) + A(x - x_0) \\ &= A(y_n) + A(x - x_0). \end{aligned}$$

L'opérateur A étant continu au point x_0 alors, il vient

$$\begin{aligned} \lim A(x_n) &= \lim A(y_n) + A(x - x_0) \\ &= A(x_0) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x). \end{aligned}$$

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall\, x \in E. \tag{1}$$

Proposition 1

La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1) *est appelée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1,\ x \neq 0} \|A(x)\|_F. \tag{2}$$

Démonstration

En effet, de la relation (1), les constantes C s'écrivent

$$\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C, \quad \forall x \in E, \quad x \neq 0,$$

d'où, il est simple de voir que la plus petite des constantes C notée $\|A\|$ s'écrit comme suit

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, on a aussi

$$
\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E},\\
&= \sup_{x\neq 0}\|\frac{1}{\|x\|_E}A(x)\|_F,\\
&= \sup_{x\neq 0}\|A(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F,\\
&= \sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|_F.
\end{aligned}
$$

D'où la deuxième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|_F.$$

Pour la troisième égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0}\|A(x)\|_F.$$

De plus, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $x \neq 0$, on écrit

$$
\begin{aligned}
\|A(x)\|_F &= \|x\|_E \left\|A(\frac{x}{\|x\|_E})\right\|_F,\\
&\leq \sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|_F,
\end{aligned}
$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|_F.$$

Passons au suprimum sur la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0}\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|_F.$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivante

$$\sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0}\|A(x)\|_F.$$

D'où la troisième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0}\|A(x)\|_F.$$

Proposition 2

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Démonstration

Supposons que la norme $\|A\|$ n'est pas finie, cela veut dire que l'on peut trouver un élément x de E, tel que

$$\|x\| \leq 1, \quad \text{et} \quad \sup \|A(x)\|_F = \infty,$$

ou encore il existe une suite x_n de E telle que

$$\|x_n\| \leq 1, \quad \text{et} \quad \|A(x_n)\|_F = \alpha_n,$$

avec

$$\lim \alpha_n = \infty.$$

Définissons la suite y_n par

$$y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}.$$

Il est à noter que cette suite converge vers l'élément 0, c'est à dire $\lim y_n = 0$, d'où, on obtient

$$\begin{aligned} \lim \|A(y_n)\|_F &= \lim \frac{1}{\alpha_n} \|A(x_n)\|_F \\ &= \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1. \end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que A est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité

$$\lim y_n = 0 \Rightarrow \lim \|A(y_n)\|_F = 0,$$

ce qui affirme que la constante $C = \|A\|$ est finie pour tout opérateur A linéaire et continu.

Théorème 2

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Démonstration

- *Condition suffisante*

Supposons que l'opérateur A est borné alors, on a

$$\|A(x)\|_F \leq M\|x\|_E,$$

ou encore

$$\|A(x) - A(0)\|_F \leq M\|x - 0\|_E,$$

d'où la continuité de l'opérateur A au point 0. Autrement dit, $\lim A(x) = A(0)$ quand $\lim x = 0$. Ce qui entraîne la continuité partout.

- *Condition nécessaire*

Soient x et y deux éléments de E tels que

$$x \in \overline{B}(0,1) = \{x \in E, \quad \|x\|_E \leq 1\},$$

et

$$y \in S(0,1) = \{y \in E, \quad \|y\|_E = 1\}.$$

Il est clair que l'on a la relation

$$\|A(y)\|_F \leq \sup \|A(x)\|_F = \|A\|.$$

D'autres part, pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, on a $\dfrac{x}{\|x\|_E} \in S(0,1)$ cela veut dire que l'on a

$$\|A(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \leq \|A\|,$$

ou encore

$$\frac{1}{\|x\|_E}\|A(x)\|_F \leq \|A\|,$$

ce qui implique la relation

$$\|A(x)\|_F \leq \|A\| \, \|x\|_E.$$

D'où l'opérateur A est borné, car la constante $\|A\|$ est toujours finie pour les opérateurs A continus.

Espaces isomorphes

Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, E et F sont dits isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe A défini sur E dans F, c'est à dire

- *A est bijectif sur E dans F.*
- *A et A^{-1} sont des opérateurs continus.*

Espaces isométriques

Les espaces E et F sont dits linéairement isométriques, s'il existe une isométrie A appliquant E dans F, c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

Remarque 2

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β, telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \ \forall\, x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$.

Théorème 3

Dans un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration

Soit $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ une base de E d'où tout élément $x \in E$ s'exprime d'une façon unique, sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Définissons une norme sur E, telle que pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |\alpha|_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $\mathcal{N}$ une norme définie sur E alors, pour tout $x, y \in E$, tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$, on a la relation

$$\begin{aligned}
|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| &\leq \mathcal{N}(x-y) \\
&= \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) \\
&= \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta)_i e_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \mathcal{N}(e_i).
\end{aligned}$$

Cette inégalité montre la continuité de la norme $\mathcal{N}$ sur E car, on a $\lim \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ quand $\lim x = y$.

Etant donné que la sphère $S(0,1) = \{x \in E; \ \|x\| = 1\}$ est un ensemble fermé et borné dans un espace E de dimension finie et $\mathcal{N}(x)$ une fonction continue positive, alors cette dernière atteint ses bornes sur la sphère, c'est à dire

$$\exists M > 0, \ \exists m > 0, \quad \text{telle que} \ \ m \leq \mathcal{N}(\frac{x}{\|x\|}) \leq M,$$

ou encore

$$m \|x\| \leq \mathcal{N}(x) \leq M \|x\|.$$

lemme 1

Soit x_n une *suite de Cauchy dans un espace normé* $(E, \| \ \|)$ *contient une sous suite* x_{nk} *convergente vers* x alors la suite x_n *est aussi convergente vers le même élément* x.

Démonstration

Soit x_n une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon, \ \ \forall p, q \geq N_\varepsilon, \ \ \text{on a} \ \|x_p - x_q\| < \varepsilon,$$

d'où en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\begin{gathered}
\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \quad \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon \\
\Rightarrow \\
\lim_{n_k \to \infty} \|x_p - x_{n_k}\| = \|x_p - x\| < \varepsilon.
\end{gathered}$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x.

Lemme 2
Tout espace normé $(E, \| \ \|)$ de dimension finie est complet

Démonstration
Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace de dimension finie cette dernière est bornée d'où, on peut extraire une sous suite x_{nk} convergente vers x ce qui implique à son tour que la suite x_n est aussi convergente vers x. D'où l'espace E est complet.

Corollaire 1
Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé E, alors F est complet dans E.

En effet, F est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ qui est complet et par conséquent F est complet dans E.

Lemme 3
Tout espace Banach $(E, \| \ \|)$ est fermé.

Démonstration
Soit x_n une suite d'éléments de E convergente vers x alors, x_n est une suite de Cauchy dans E complet, d'où $x \in E$.

Corollaire 2
Soit F un sous espace vectoriel complet d'un espace de normé E, alors F est fermé.

En effet, soit $x_0 \in \overline{F}$ il existe alors une suite x_n d'éléments de F convergente vers x_0 dans E, cette suite x_n est de Cauchy dans F, comme F est complet cette dernière est convergente dans F, la limite étant unique d'où $x_0 \in F$. Autrement dit, $F = \overline{F}$ c'est à dire F fermé.

Corollaire 3
Tout sous espace F de dimension finie d'un espace normé $(E, \| \ \|)$ est fermé.

En effet, il est clair que d'après le corollaire 1 l'espace F est complet et d'après le corollaire 2 l'espace F est fermé.

Remarque 3
Tout sous espace F de dimension infinie d'un espace normé $(E, \| \ \|)$ n'est pas nécessairement fermé.

En effet, il suffit de prendre $E = C([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme uniforme

$$\|\varphi\| = \max_{t\in[a,b]} \|\varphi(t)\|$$

et soit F l'ensemble des polynômes qui est un sous espace de $C([a,b])$, non fermé car d'après Weierstrass, on a

toute fonction continue sur $[a,b]$ est une limite d'une suite uniformément convergente de Polynômes. Autrement dit, la fermeture de $\overline{F}$ coïncide avec $C([a,b])$.

Théorème 4
Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ de tous les opérateurs linéaires continus sur E dans F est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur E dans *F de plus, $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.*

Démonstration

- Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\|A\| = 0$, la relation de la continuité

$$\|A(x)\| \leq \|A\|\|x\|,$$

nous donne la nullité de l'opérateur A, c'est à dire

$$A(x) = 0, \ \ \forall\, x \in E.$$

D'où la relation

$$A = 0.$$

- Soit $A_1, \ A_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ alors, on a $A_1 + A_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, c'est à dire

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1 + A_2\|\|x\|,$$

de plus, on a aussi

$$\begin{aligned}\|A_1(x)+A_2(x)\| &\leq \|A_1(x)\|+\|A_2(x)\| \\ &\leq \|A_1\|\|x\|+\|A_2\|\|x\| \\ &\leq (\|A_1\|+\|A_2\|)\|x\|.\end{aligned}$$

Notons que $\|A_1+A_2\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A_1+A_2\| \leq \|A_1\|+\|A_2\|.$$

- Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors, on a $\lambda A \in \mathcal{L}(E,F)$, c'est à dire

$$\|\lambda A(x)\| \leq \|\lambda A\|\|x\|,$$

de plus, on a aussi

$$\begin{aligned}\|\lambda A(x)\| &= \mid \lambda \mid \|A(x)\| \\ &\leq \mid \lambda \mid \|A\|\|x\|.\end{aligned}$$

Notons que $\|\lambda A\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|\lambda A\| \leq \mid \lambda \mid \|A\|.$$

D'autres part, on a la relation

$$\|A(x)\| \leq \|A\|\|x\|,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\|A(x)\| &= \frac{1}{\mid \lambda \mid}\|\lambda A(x)\| \\ &\leq \frac{1}{\mid \lambda \mid}\|\lambda A\|\|x\|.\end{aligned}$$

Notons que $\|A\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A\| \leq \frac{1}{\mid \lambda \mid}\|\lambda A\|,$$

ou encore
$$| \lambda | \, \|U\| \leq \|\lambda U\|.$$

Des deux inégalités précédentes, on déduit l'égalité
$$| \lambda | \, \|A\| = \|\lambda A\|.$$

Théorème 5

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.

Démonstration

En effet, soit $\{A_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$,
$$\forall \, \varepsilon > 0, \, \exists \, N_\varepsilon, \, \forall \; p, q \geq N_\varepsilon \; \|A_p - A_q\| < \varepsilon,$$
alors, pour tout $x \in E$, on a
$$\begin{aligned} \|A_p(x) - A_q(x)\| \; &= \|(A_p - A_q)(x)\| \\ &\leq \|A_p - A_q\| \|x\| \\ &< \varepsilon \|x\|. \end{aligned}$$
D'où, on tire que $\{A_n(x)\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach F, alors $A_n(x)$ converge dans F vers un opérateur $A(x)$. Passons à la limite des deux membres, on obtient
$$\lim_{p \to \infty} \|A_p(x) - A_q(x)\| = \|A(x) - A_q(x)\| < \varepsilon \|x\|, \quad \forall \; q \geq N_\varepsilon,$$
d'où l'opérateur $B(x) = A(x) - A_q(x)$ est borné donc continu de E dans F, il est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, c'est à dire
$$\|A(x) - A_q(x)\| \leq \|A - A_q\| \|x\|,$$

Notons que $\|A - A_q\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation
$$\|A - A_q\| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de la suite A_q vers A dans $\mathcal{L}(E,F)$. L'opérateur A est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ comme différence de deux opérateurs continus
$$A(x) = B(x) - A_q(x) \in \mathcal{L}(E,F).$$

Dual topologique

On appelle dual topologique de l'espace E et que l'on note E^* l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires continues $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Remarque 4

Le dual topologique $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est inclus dans le dual algébrique $E^+ = L(E, \mathbb{K})$.

Bibliographie

[2] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir 1974.

[4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie 2004.

[5] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill New York 1973.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Laboratory of Pure and Applied Mathematics
and
Laboratory of Signals Analysis and Systems
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr