§3. Opérateurs Adjoints

Opérateurs linéaires Adjoints dans les espaces normés

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F alors, pour tout $\varphi \in E$ et $\psi \in F$, on définit les fonctionnelles linéaires bornées $U \in F^* = \mathcal{L}(F, \mathbb{K})$ et $V \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ comme suit

$$\begin{array}{rccc} & F & \to & \mathbb{K} \\ U: & \psi & \mapsto & U(\psi) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} & E & \to & \mathbb{K} \\ V: & \varphi & \mapsto & V(\varphi) \end{array}$$

L'opérateur noté A^* défini sur F^* dans E^* est dit opérateur adjoint de A si l'on a, pour tout $U \in F^*$ et $V \in E^*$

$$\begin{array}{rccl} & F^* & \to & E^* \\ A^*: & U & \mapsto & A^*(U) = U(A(\varphi)) = V(\varphi), \end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{rccccc} & E & \xrightarrow{A} & F & \xrightarrow{U} & \mathbb{K} \\ A^* = U \circ A: & \varphi & \mapsto & A(\varphi) & \mapsto & U(A(\varphi)). \end{array}$$

Lemme 1

Soit φ un élément d'un espace normé E, $(\varphi \in E)$ alors, il existe une fonctionnelle linéaire $V \in E^*$ telle que $\|V\| = 1$ avec

$$V(\varphi) = \|\varphi\|.$$

Démonstration

Il suffit de voir le théorème de Hahn-Banach dans les espaces de normés.

Lemme 2

Soit φ un élément d'un espace normé E, $(\varphi \in E)$ alors, la norme $\|\varphi\|$ est définie par

$$\|\varphi\| = \max\{|V'\varphi)|; \quad V \in E^*, \quad \|V\| = 1\}.$$

Démonstration

En vertu du lemme 1, il existe $U \in E^*$ telle que $\|U\| = 1$ avec la relation $U(\varphi) = \|\varphi\|$. D'où pour tout $V \in E^*$, avec $\|V\| = 1$, on a

$$|V(\varphi)| \leq \|\varphi\| = U(\varphi).$$

Proposition 1

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F alors, l'opérateur Adjoint A^* est un opérateur linéaire borné de F^* dans E^*. De plus, on a

$$\|A\| = \|A^*\| .$$

Démonstration

Pour tout $\varphi \in E$, on pose

$$V(\varphi) = U(A(\varphi)),$$

ou encore

$$V = A^*(U) = U(A)$$

Il est clair que la fonctionnelle $V(\varphi) = U(A(\varphi))$ est bornée comme produit de deux opérateurs bornés la fonctionnelle U et l'opérateur A. Autrement dit

$$\|A^*(U)\| \leq \|A^*\| \|U\|$$

De plus, on a

$$\|A^*(U)\| = \|U(A)\| \leq \|U\| \|A\|$$

D'où, on obtient

$$\|A^*\| \leq \|A\| .$$

Inversement, en vertu du lemme 2, il vient

$$\begin{aligned} \|A(\varphi)\| &= \max\{|U(A(\varphi))| ; \quad U \in E^*, \quad \|U\| = 1\} \\ &= \max\{|A^*(U)(\varphi)| ; \quad U \in E^*, \quad \|U\| = 1\} \\ &\leq \|A^*\| \|\varphi\| \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\|A\| \leq \|A^*\| .$$

Propriétés

Soient A_1 et A_2 deux opérateurs linéaires définis sur un espace normé E dans un espace normé F et A_3 un opérateur linéaire défini sur F *dans un espace normé Z alors, on a les relations suivantes*

- $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$.
- $(\lambda A_1)^* = \overline{\lambda} A_1^*$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $(A_1^*)^* = A_1$.
- $(A_1 A_3)^* = A_3^* A_1^*$

Opérateurs linéaires Adjoints dans les espaces de Hilbert

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H_1 à valeurs dans un espace de Hilbert H_2, l'opérateur linéaire noté A^* défini de H_2 dans H_1 est dit opérateur adjoint de A si l'on a *pour tout* $\varphi \in H_1$ *et* $\psi \in H_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}.$$

Remarque 1

L'opérateur adjoint A^* est défini sur l'espace de Hilbert H_2^* à valeurs dans l'espace de Hilbert H_1^*. Mais les espaces de Hilbert H_1^* et H_2^* sont respectivement linéairement isométriques à H_1 et H_2.

Théorème 1 *(Existence de l'opérateur adjoint)*

Soit A un opérateur linéaire borné, défini sur un espace de Hilbert H_1 à valeurs dans un espace de Hilbert H_2 alors, il existe un opérateur linéaire borné unique noté A^* défini de H_2 dans H_1 tel que l'on a pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}.$$

De plus, on a

$$\| A \| = \| A^* \|.$$

Démonstration

- *Existence*

En effet, pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$, on définit une fonctionnelle linéaire bornée U de H_1 dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ comme suit

$$\begin{array}{lll} H_1 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & U(\varphi) \ = \langle A\varphi, \psi \rangle . \end{array}$$

$\cdot$ La fonctionnelle U est linéaire car, pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in H_1$, $\psi \in H_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} U(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) &= \langle A(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2), \psi\rangle \\ &= \langle A(\alpha_1\varphi_1) + A(\alpha_2\varphi_2), \psi\rangle \\ &= \langle A(\alpha_1\varphi_1), \psi\rangle + \langle A(\alpha_2\varphi_2), \psi\rangle \\ &= \alpha_1 \langle A\varphi_1, \psi\rangle + \alpha_2 \langle A\varphi_2, \psi\rangle \\ &= \alpha_1 U(\alpha_1\varphi_1) + \alpha_2 U(\varphi_2). \end{aligned}$$

$\cdot$ La fonctionnelle U est bornée car, pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$, on a

$$\begin{aligned} |U(\varphi)| &= |\langle A\varphi, \psi\rangle| \\ &\leq \| A\varphi \| \| \psi \| \\ &\leq \| A \| \| \varphi \| \| \psi \| . \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Riesz, il existe un élément unique $f \in H_1$, tel que

$$U(\varphi) = \langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, f\rangle ,$$

cette égalité définie un opérateur noté A^* de H_2 dans H_1tel que

$$A^*\psi = f,$$

ou encore

$$U(\varphi) = \langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A^*\psi\rangle .$$

• *Unicité*

Soient A_1^* et A_2^* deux opérateurs adjoints de l'opérateur A alors, pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$, on écrit

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A_1^*\psi\rangle = \langle \varphi, A_2^*\psi\rangle .$$

Autrement dit, pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$, on a

$$\langle \varphi, A_1^*\psi\rangle = \langle \varphi, A_2^*\psi\rangle .$$

D'où, on obtient

$$A_1^*\psi = A_2^*\psi$$

ou encore

$$A_1^* = A_2^*.$$

- *Linéarité de l'opérateur adjoint* A^*

Pour tout $\varphi \in H_1$, $\psi_1, \psi_2 \in H_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, A^*(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) \rangle &= \langle A\varphi, \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \rangle \\
&= \langle A\varphi, \alpha_1\psi_1 \rangle + \langle A\varphi, \alpha_2\psi_2 \rangle \\
&= \overline{\alpha}_1 \langle A\varphi, \psi_1 \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle A\varphi, \psi_2 \rangle \\
&= \overline{\alpha}_1 \langle \varphi, A^*\psi_1 \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle \varphi, A^*\psi_2 \rangle \\
&= \langle \varphi, \alpha_1 A^*\psi_1 \rangle + \langle \varphi, \alpha_2 A^*\psi_2 \rangle \\
&= \langle \varphi, \alpha_1 A^*\psi_1 + \alpha_2 A^*\psi_2 \rangle
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$A^*(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1 A^*\psi_1 + \alpha_2 A^*\psi_2.$$

- *Egalité des normes* $\|A\|$ et $\|A^*\|$

Il est clair que l'on a

$$\begin{aligned}
\|A^*\psi\|^2 &= \langle A^*\psi, A^*\psi \rangle \\
&= \langle AA^*\psi, \psi \rangle \\
&\leq \|AA^*\psi\| \, \|\psi\| \\
&\leq \|A\| \, \|A^*\psi\| \, \|\psi\| .
\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\| A^*\psi \| \leq \| A \| \| \psi \|,$$

ou encore

$$\| A^* \| \leq \| A \| .$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\|A\varphi\|^2 &= \langle A\varphi, A\varphi \rangle \\
&= \langle A^*A\varphi, \varphi \rangle \\
&\leq \|A^*A\varphi\| \, \|\varphi\| \\
&\leq \|A^*\| \, \|A\varphi\| \, \|\varphi\| .
\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\| A\varphi \| \leq \| A^* \| \| \varphi \|,$$

ou encore

$$\| A \| \leq \| A^* \| .$$

D'où, l'égalité des normes

$$\| A \| = \| A^* \| .$$

Proposition 2

Soient A_1 et A_2 deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 alors, on a les relations suivantes

- $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$.
- $(\lambda A_1)^* = \overline{\lambda} A_1^*$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $(A_1^*)^* = A_1$.

Démonstration

- Pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi,\ (A_1 + A_2)^* \psi \rangle &= \langle (A_1 + A_2)\varphi,\ \psi \rangle \\
&= \langle A_1\varphi + A_2\varphi,\ \psi \rangle \\
&= \langle A_1\varphi, \psi \rangle + \langle A_2\varphi, \psi \rangle \\
&= \langle \varphi, A_1^*\psi \rangle + \langle \varphi, A_2^*\psi \rangle \\
&= \langle \varphi, A_1^*\psi + A_2^*\psi \rangle \\
&= \langle \varphi, (A_1^* + A_2^*)\psi \rangle
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(A_1 + A_2)^* \psi = (A_1^* + A_2^*)\psi,$$

ou encore

$$(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*.$$

- Pour tout $\varphi \in H_1$, $\psi \in H_2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi,\ (\lambda A_1)^* \psi \rangle &= \langle (\lambda A_1)\varphi,\ \psi \rangle \\
&= \lambda \langle A_1\varphi, \psi \rangle \\
&= \lambda \langle \varphi, A_1^*\psi \rangle \\
&= \langle \varphi, \overline{\lambda} A_1^*\psi \rangle
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(\lambda A_1)^*\psi = \overline{\lambda} A_1^*\psi,$$

ou encore

$$(\lambda A_1)^* = \overline{\lambda} A_1^*.$$

- Pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$, on a

$$\begin{aligned}
\langle A_1\varphi, \psi\rangle &= \langle \varphi, A_1^*\psi\rangle \\
&= \overline{\langle A_1^*\psi, \varphi\rangle} \\
&= \overline{\langle \psi, (A_1^*)^*\varphi\rangle} \\
&= \langle (A_1^*)^*\varphi, \psi\rangle
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$A_1\varphi = (A_1^*)^*\varphi,$$

ou encore

$$(A_1^*)^* = A_1.$$

Proposition 3

Soit A_1 un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 et A_2 un opérateur linéaire défini dans H_2 dans un espace de Hilbert H_3 alors, on a la relation suivante

$$(A_2A_1)^* = A_1^*A_2^*$$

Démonstration

En effet, pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_3$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi,\ (A_2A_1)^*\psi\rangle &= \langle (A_2A_1)\varphi,\ \psi\rangle \\
&= \langle A_2(A_1\varphi), \psi\rangle \\
&= \langle A_1\varphi, A_2^*\psi\rangle \\
&= \langle \varphi, A_1^*A_2^*\psi\rangle
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$(A_2A_1)^*\psi = (A_1^*A_2^*)\psi,$$

ou encore

$$(A_2A_1)^* = A_1^*A_2^*\ .$$

Proposition 4

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 admet un inverse A^{-1} alors l'opérateur adjoint A^* admet aussi un inverse $(A^*)^{-1}$.. De plus, on a

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Démonstration

En effet, l'opérateur A étant inversible alors, on a

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Par passage à l'adjoint des deux membres, on obtient

$$(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^*.$$

En vertu de proposition 2, il vient

$$(A^{-1})^*A^* = A^*(A^{-1})^* = I^*.$$

D'où l'existence de l'opérateur inverse $(A^*)^{-1}$ de A^*.
Autrement dit, on écrit

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Proposition 5

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 alors, on a

$$N(A) = \{\varphi \in H_1,\ A\varphi = 0\} = R^{\perp}(A^*),$$

ou encore

$$N(A^*) = \{\psi \in H_2,\ A^*\psi = 0\} = R^{\perp}(A).$$

Démonstration

En effet, soit $\varphi \in \ker A$ alors, pour tout $\psi \in H_2$, on a $A^*\psi \in R(A^*)$. De plus

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = 0 = \langle \varphi, A^*\psi \rangle.$$

D'où, on obtient $\varphi \in R^{\perp}(A^*)$, ou encore

$$N(A) \subset R^{\perp}(A^*).$$

Inversement, soit $\theta \in R^{\perp}(A^*)$ alors, pour tout $\psi \in H_2$, on a $A^*\psi \in R(A^*)$. De plus

$$\langle \theta, A^*\psi \rangle = 0 = \langle A\theta, \psi \rangle .$$

D'où, on obtient $\theta \in N(A)$, c'est à dire

$$R^{\perp}(A^*) \subset N(A),$$

ou encore

$$N(A) = R^{\perp}(A^*).$$

Pour la deuxième égalité, il suffit de remplacer l'opérateur A par A^* dans la première égalité et en vertu de la proposition 1, il vient

$$N(A^*) = R^{\perp}((A^*)^*) = R^{\perp}(A).$$

Théorème 2

Soit A un opérateur linéaire compact, défini sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 alors, l'opérateur adjoint A^* défini de H_2 dans H_1 est aussi un opérateur linéaire compact.

Démonstration

Soit ψ_n une suite bornée de H_2 alors, il existe une constante positive M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\| \psi_n \| < M$, l'opérateur A étant compact de H_1 dans H_2 et l'opérateur A^* est borné de H_2 dans H_1 alors, l'opérateur produit AA^* défini de H_2 dans H_2 est un opérateur compact comme produit de deux opérateurs l'un compact et l'autre borné. D'où l'existence d'une sous suite ψ_{n_k} de ψ_n telle que la suite $AA^*(\psi_{n_k})$ soit convergente dans H_2

$$\begin{aligned}
\left\| A^*\psi_{n_p} - A^*\psi_{n_q} \right\|^2 &= \left\| A^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}) \right\|^2 \\
&= \left\langle A^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}), A^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}) \right\rangle \\
&= \left\langle AA^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}), \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \right\rangle \\
&= \left\langle AA^*\psi_{n_p} - AA^*\psi_{n_q}, \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \right\rangle \\
&\leq \left\| AA^*\psi_{n_p} - AA^*\psi_{n_q} \right\| \left\| \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \right\| \\
&\leq 2M\varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $A^*\psi_{n_k}$ est de Cauchy dans un espace de Hilbert. D'où la convergence de cette suite $A^*\psi_{n_k}$ dans H_1.

Opérateurs auto adjoints

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur A est dit opérateur auto adjoint si, on a la relation

$$A = A^*$$

ou encore, pour tout $\varphi, \psi \in H$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle .$$

Remarque 2

Le produit de deux opérateurs auto adjoints n'est pas en général un opérateur auto adjoint.

Lemme 1

Soient A et B deux opérateurs linéaires auto adjoints définis sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, pour que l'opérateur produit AB soit un opérateur auto adjoint il faut et il suffit qu'ils commutent, c'est à dire $AB = BA$.

Démonstration

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\langle AB\varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (AB)^*\psi \rangle \\
&= \langle \varphi, B^*A^*\psi \rangle \\
&= \langle \varphi, BA\psi \rangle \\
&= \langle \varphi, AB\psi \rangle .
\end{aligned}$$

D'où, on obtient.

$$\langle AB\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, AB\psi \rangle ,$$

ou encore

$$AB = (AB)^*.$$

Théorème 3

Soit A un opérateur linéaire auto adjoint défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur puissance A^n est un opérateur auto adjoint pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in H$, on suppose que la relation est vraie pour tout $n \geq 1$, alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle A^{n+1}\varphi, \psi \right\rangle &= \left\langle A^{n}A\varphi, \psi \right\rangle \\
&= \left\langle A\varphi, A^{n}\psi \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi, AA^{n}\psi \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi, A^{n+1}\psi \right\rangle
\end{aligned}$$

Proposition 5

Soit A_n une suite d'opérateurs linéaires auto adjoints définis sur un espace de Hilbert H dans lui même, si la suite A_n converge faiblement vers A

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle A_n\varphi, \psi \right\rangle = \left\langle A\varphi, \psi \right\rangle, \text{ pour tout } \varphi, \psi \in H,$$

alors, A est un opérateur auto adjoint.

Démonstration

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in H$, on a

$$\left\langle A_n\varphi, \psi \right\rangle = \left\langle \varphi, A_n\psi \right\rangle.$$

Passons à la limite des deux membres, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle A_n\varphi, \psi \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \varphi, A_n\psi \right\rangle,$$

ou encore

$$\left\langle A\varphi, \psi \right\rangle = \left\langle \varphi, A\psi \right\rangle.$$

Remarque 2

Soit A_n une suite d'opérateurs auto adjoints A_n converge fortement vers l'opérateur A, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A_n\varphi = A\varphi, \text{ pour tout } \varphi \in H.$$

alors, l'opérateur A est un opérateur auto adjoint.

Remarque 3

Soit A_n une suite d'opérateurs auto adjoints A_n converge en norme vers l'opérateur A, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0,$$

alors, l'opérateur A est un opérateur auto adjoint.

Théorème 4

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur A est un opérateur auto adjoint si et seulement si pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle = a \in \mathbb{R},$$

Démonstration

• *Premier cas.* $\langle A\varphi, \varphi\rangle \in \mathbb{R}$

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in H$, posons

$$\begin{aligned} X &= \left(\langle A(\varphi+\psi), \varphi+\psi\rangle - \langle A(\varphi-\psi), \varphi-\psi\rangle\right) \\ Y &= \left(\langle A(\varphi+i\psi), \varphi+i\psi\rangle - \langle A(\varphi-i\psi), \varphi-i\psi\rangle\right). \end{aligned}$$

En vertu de la relation $< A\varphi, \varphi >$ est un réel pour tout φ de H, les valeurs de X et Y sont aussi réelles. De plus, il est simple de vérifier que l'on a

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \frac{X}{4} + i\frac{Y}{4}.$$

De même, on a aussi l'égalité

$$\begin{aligned} \langle A\psi, \varphi\rangle &= \left(\langle A(\psi+\varphi), \psi+\varphi\rangle - \langle A(\psi-\varphi), \psi-\varphi\rangle\right) \\ &\quad + i\left(\langle A(\psi+i\varphi), \psi+i\varphi\rangle - \langle A(\psi-i\varphi), \psi-i\varphi\rangle\right) \\ &= \frac{X}{4} - i\frac{Y}{4} \end{aligned}$$

Autrement dit, il vient

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \frac{X}{4} + i\frac{Y}{4} = \overline{\frac{X}{4} - i\frac{Y}{4}} = \overline{\langle A\psi, \varphi\rangle} = \langle \varphi, A\psi\rangle,$$

ou encore

$$A = A^*.$$

D'où A est un opérateur auto adjoint.

- *Deuxième cas. A auto adjoint*

Pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, A\varphi \rangle = \overline{\langle A\varphi, \varphi \rangle}.$$

D'où l'expression $< A\varphi, \varphi >$ est un réel.

Proposition 6

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, il existe deux opérateurs linéaires, bornes, auto adjoints U et V tels que

$$A = U + iV$$

Démonstration

En effet, il suffit de prendre $U = \dfrac{1}{2}(A + A^*)$ et $V = \dfrac{1}{2i}(A - A^*)$

Opérateurs antiauto adjoints

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que A est un opérateur antiauto adjoint si, on a la relation

$$A = -A^*$$

ou encore, pour tout $\varphi, \psi \in H$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, A\psi \rangle .$$

Bibliographie

[1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir Moscou 1981.

[2] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie 2004.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Laboratory of Pure and Applied Mathematics
and
Laboratory of Signals Analysis and Systems
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr