# §2. Opérateurs Compacts

**Opérateurs linéaires compacts**

Soit $A$ un opérateur linéaire d'un espace normé $E$ dans un espace normé $F$, on dit que $A$ est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné $G$ dans $E$ à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans $F$. Autrement dit, la ferméture $\overline{A(G)}$ est compacte.

**Ensembles relativement compacts**

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de $G$, il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans $F$.

**Théorème 1** (critère de compacité)

*Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\varphi_n$ de $E$, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente de $F$.*

**Démonstration**

Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact.

**Théoréme 2**

*Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

**Démonstration**

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite borné de $E$ et soit $\{A\varphi_n\}$ une suite de $F$, alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x), \text{ avec } \varphi_n \in E, \ n \in \mathbb{N}.$$

$A_1$ et $A_2$ étant compacts, on peut extraire de $\{A_1\varphi_n\}$ et de $\{A_2\varphi_n\}$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $\{A\varphi_n\}$, donc $A$ est compact.

**Théorème 3**

*Le produit $AB$ de deux opérateurs bornés $A$ et $B$ est compact si l'un des opérateurs $A$ ou $B$ est compact.*

**Démonstration**

Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de $E$, alors si $B$ est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur $A$ il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que $AB$ est compact.

D'autres part si $B$ est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur $A$ car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que $AB$ est compact.

**Théorème 4**

*Soit $E$ un espace normé et $F$ un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de $E$ dans $F$, convergente en norme vers l'opérateur linéaire $A$ de $E$ dans $F$*

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| = 0.$$

*Alors $A$ et compact.*

**Démonstration**

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de $E$, l'opérateur $A_1$ étant compact, on peut extraire de la suite $\{A_1\varphi_n\}$ une sous suite convergente; soit $\{\varphi_n^1\}$ une sous suite de $\{\varphi_n\}$ telle que, $\{A_1\varphi_n^1\}$ soit convergente.

De la même façon, on peut extraire de la suite $\{A_2\varphi_n^1\}$ une sous suite convergente, car $A_2$ est compact; soit $\{\varphi_n^2\}$ une sous suite de $\{\varphi_n^1\}$ telle que, la suite $\{A_2\varphi_n^2\}$ soit convergente.

Remarquons que, la suite $\{A_1\varphi_n^2\}$ est une sous suite de la suite convergente $\{A_1\varphi_n^1\}$ qui à son tour convergente.

En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs $A_1, A_2, ..., A_p, ...$, on détermine les suites $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, ..., \{\varphi_n^p\}, ....$ Il est à remarquer que la suite $\{\varphi_n^p\}$ est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites $\{A_k\varphi_n^p\}$ sont convergentes pour $(k = 1, 2, ..., p)$.

Comme l'espace $Y$ est complet, pour la compacité de l'opérateur $A$ il suffit de montrer que la suite $\{A\varphi_n^p\}$ est une suite Cauchy, alors

$$\| A\varphi_n^p - A\varphi_n^q \| \leq \| A\varphi_n^p - A_n\varphi_n^p \| + \| A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q \| + \| A_n\varphi_n^q - A\varphi_n^q \|$$

Soit $\| \varphi_n \| \leq M$; choisissons $n$ de sorte que l'on a $\| A - A_n \| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$, ensuite choisissons $N$ tel que, pour tous les $p > N$ et $q > N$, on a la relation $\| A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q \| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ car la suite $\{A_n\varphi_n^p\}$ est convergente.

Dans ces conditions, on aura pour tout $p$ et $q$ suffisamment grands.

$$\| A\varphi_n^p - A\varphi_n^q \| < \varepsilon.$$

**Théorème 5**

*Soit $A$ un opérateur borné de $E$ dans $F$, à image $A(E)$ de dimension finie. Alors $A$ est compact.*

**Démonstration**

En effet, car l'opérateur $A$ transforme tout ensemble borné $G$ de $E$ à un ensemble borné $A(G)$ dans un espace de dimension finie $A(E)$ ce qui implique que $A(G)$ est précompact.

**Lemme 1**

*Soit $G$ un sous espace fermé d'un espace normé $E$ tel que, $G \neq E$, alors il existe un élément $\varphi \in E$, avec $\|\varphi\| = 1$ tel que, pour tout $\phi \in G$, on a*

$$\| \varphi - \phi \| \geq \alpha, \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1$$

**Démonstration**

En effet, soit $f$ un élément de $E$ tel que $f \notin G$ alors, on a

$$\inf_{\phi \in E} \| f - \phi\| = \beta > 0,$$

choisissons un élément $\psi \in G$ tel que,

$$\beta \leq \|f - \psi \| \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

soit $\varphi$ le vecteur donné par

$$\varphi = \frac{f - \psi}{\| f - \psi \|},$$

alors le vecteur $\varphi$ est de norme égale à l'unité ($\| \varphi \| = 1$).

De plus, on a

$$\begin{aligned} \| \varphi - \phi \| &= \tfrac{1}{\|f-\psi\|} \| f - \{\psi + (\| f - \psi \| \phi)\} \| \\ &\geq \frac{\beta}{\| f - \psi \|} \geq \alpha. \end{aligned}$$

**Théorème 6**

*L'opérateur identique $I$ de $E$ dans $E$ est compact si et seulement si $E$ est de dimension finie.*

**Démonstration**

Soit $\varphi_1$ un élément de $E$, tel que $\| \varphi_1 \|= 1$, alors $G_1 = span\{\varphi_1\}$ est un sous espace fermé de $E$ car $G_1$ est de dimension finie. D'après le lemme1, il existe un élément $\varphi_2 \in E$, tel que $\| \varphi_2 \|= 1$ et $\| \varphi_1 - \varphi_2 \|> \frac{1}{2}$. Prenons une deuxième fois le sous espace fermé $G_2 = span\{\varphi_1, \varphi_2\}$, il existe alors un élément $\varphi_3 \in E$ avec $\| \varphi_3 \|= 1$ , $\| \varphi_1 - \varphi_3 \|> \frac{1}{2}$ et $\| \varphi_2 - \varphi_3 \|> \frac{1}{2}$. On répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'un suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant $\| \varphi_n \|= 1$ et $\| \varphi_n - \varphi_m \|> \frac{1}{2}$, pour tout $m \neq n$.

Il est à remarquer que cette suite $\{\varphi_n\}$ est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente. C.Q.F.D.

**Corollaire 1**

*La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

En effet, il suffit d'appliquer le théorème6, car la boule unité $B(0,1)$ est sa propre image dans l'espace $X$ de dimension infinie par l'opérateur identique

**Théorème 7**

*Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

**Démonstration**

En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in X, \quad \| x \|\leq 1\},$$

la boule fermé de rayon l'unité, alors l'ensemble $\overline{A(B(0,1))}$ est compact, donc borné, c'est à dire

$$\|Ax\| < \infty \quad \text{et par conséquent,} \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| < \infty \ ,$$

ce qui signifie que l'opérateur $A$ est borné.

Réciproquement, l'opérateur identique $I$ de $E$ dans $E$ est borné mais il n'est pas compact.

**Théorème 8**

*L'opérateur intégral $A$ de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

**Démonstration**

Soit $E$ un ensemble borné de $C(G)$ alors, on a

$$\| \varphi \| \leq M \quad \text{pour tout } \varphi \in E.$$

De plus,

$$| A\varphi(x) | \leq M \mid G \mid \max_{x,y \in G} | K(x,y) |, \ \forall x \in G \text{ et } \forall \varphi \in E,$$

cela veut dire que $A(E)$ est borné.

L'opérateur $K$ est uniformément continu sur le compact $G \times G$, d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x, y, z \in G, | x - y | < \delta \Rightarrow | K(x,z) - K(y,z) | < \frac{\varepsilon}{M \mid G \mid}$$

d'où

$$| A\varphi(x) - A\varphi(y) | < \varepsilon \quad \text{pour tout } \varphi \in E \ \text{ et } x, y \in G, \ \text{avec } \ | x - y | < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli. Alors $A$ est compact.

**Noyau faiblement singulier**

On appelle noyau faiblement singulier la fonction $K$ continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,

$$\forall x, y \in G, \ x \neq y, \ \exists M > 0, \quad | K(x,y) | < \frac{M}{| x - y |^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

**Théorème 9**

*L'opérateur intégral $A$ de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

**Démonstration**

Il est à remarquer que l'opérateur

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,y)\varphi(y)dy, \quad x, y \in G$$

existe comme une intégrale impropre, car

$$| K(x,y)\varphi(x) | \leq M \parallel \varphi \parallel | x-y |^{\alpha-n} .$$

De plus, on a

$$\int_G | x-y |^{\alpha-n} dy \leq \omega_n \int_0^d \rho^{\alpha-n}\rho^{n-1} d\rho = \frac{\omega_n}{\alpha} d^\alpha,$$

où $\omega_n$ désigne la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$, et $d$ le diamètre de l'ensemble $G$.

Construisons maintenant une suite d'opérateurs compacts $A_p$, convergente vers l'opérateur $A$ et telle que, on a

$$\lim_{p\to\infty} \parallel A - A_p \parallel = 0.$$

Soit $h$ une fonction continue par morceau, définie sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t-1 & \text{si} \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq t < \infty \end{cases},$$

le noyau $K_p$ défini sur $G \times G$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par

$$K_p(x,y) = \begin{cases} h(p \mid x-y \mid) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

est un noyau continu pour tout $p \in \mathbb{N}$ et par conséquent, les opérateurs intégraux $A_p$ sont compacts. De plus,

$$\begin{aligned} | A\varphi(x) - A_p\varphi(x) | &= \left| \int_{G\cap|x-y|<\frac{1}{p}} \{1 - h(p \mid x-y \mid)\} K(x,y)\varphi(y)dy \right| \\ &\leq M \parallel \varphi \parallel \omega_n \int_0^{\frac{1}{p}} \rho^{\alpha-n}\rho^{n-1} d\rho \\ &\leq M \parallel \varphi \parallel \frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha}, \quad x \in G. \end{aligned}$$

Il est aisé de remarquer que la suite des opérateurs $A_p\varphi$ converge uniformément vers $A\varphi$ quand $p \to \infty$, d'où l'opérateur $A\varphi$ est un élément de $C(G)$, de plus

$$\parallel A - A_p \parallel \leq M \frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha} \to 0, \text{ lorsque } p \to \infty,$$

cela implique que l'opérateur $A$ est compact.

**Théorème 10**

*L'opérateur intégral $A$ de $C(\partial G)$ dans $C(\partial G)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial G)$* si $\partial G$ est de classe $C^1$.

## Bibliographie

[1] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.

**Address**. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Laboratory of Pure and Applied Mathematics
and
Laboratory of Signals Analysis and Systems
University of Msila
28000 ALGERIA
**E-mail**. mostefanadir@yahoo.fr