

## §1. Opérateurs Continus

### Linéarité des opérateurs

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- *Condition additive*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

### Continuité des opérateurs linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $G$  si, on a la propriété suivante

Pour toute suite  $x_n$  de  $G$  converge vers  $x_0$ , la suite  $A(x_n)$  converge vers  $A(x_0)$  c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

### Remarque 1

L'opérateur linéaire  $A$  est dit continu sur  $G$ , s'il est continu en chaque point de l'ensemble  $G$ .

### Théorème 1

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$ , est dit continu partout sur  $G$  s'il est continu en point  $x_0$  de  $G$ .

### Démonstration

Soit  $x_n$  une suite convergente vers  $x$  alors, cette suite peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0), \\ &= y_n + (x - x_0). \end{aligned}$$

Il est clair que la suite  $y_n$  est une suite convergente vers l'élément  $x_0$

$$\lim y_n = \lim[x_0 + (x_n - x)] = x_0,$$

la composition des deux membres par l'opérateur  $A$ , donne

$$\begin{aligned} A(x_n) &= A(x_0 + (x_n - x)) + A(x - x_0) \\ &= A(y_n) + A(x - x_0). \end{aligned}$$

L'opérateur  $A$  étant continu au point  $x_0$  alors, il vient

$$\begin{aligned} \lim A(x_n) &= \lim A(y_n) + A(x - x_0) \\ &= A(x_0) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x). \end{aligned}$$

### Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E. \quad (1)$$

### Proposition 1

La plus petite des constantes  $C$  vérifiant la relation (1) est appelée norme de  $A$  notée  $\|A\|$  et donnée par

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F. \quad (2)$$

### Démonstration

En effet, de la relation (1), les constantes  $C$  s'écrivent

$$\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C, \quad \forall x \in E, \quad x \neq 0,$$

d'où, il est simple de voir que la plus petite des constantes  $C$  notée  $\|A\|$  s'écrit comme suit

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}, \\
&= \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_E} A(x) \right\|_F, \\
&= \sup_{x \neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F, \\
&= \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.
\end{aligned}$$

D'où la deuxième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.$$

Pour la troisième égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F.$$

De plus, pour tout  $x \in E$  tel que  $\|x\| \leq 1$  et  $x \neq 0$ , on écrit

$$\begin{aligned}
\|A(x)\|_F &= \|x\|_E \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F, \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.$$

Passons au supremum sur la boule fermée  $\overline{B}(0, 1)$  des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivante

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F.$$

D'où la troisième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F.$$

### Proposition 2

La norme  $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$  sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

### Démonstration

Supposons que la norme  $\|A\|$  n'est pas finie, cela veut dire que l'on peut trouver un élément  $x$  de  $E$ , tel que

$$\|x\| \leq 1, \text{ et } \sup \|A(x)\|_F = \infty,$$

ou encore il existe une suite  $x_n$  de  $E$  telle que

$$\|x_n\| \leq 1, \text{ et } \|A(x_n)\|_F = \alpha_n,$$

avec

$$\lim \alpha_n = \infty.$$

Définissons la suite  $y_n$  par

$$y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}.$$

Il est à noter que cette suite converge vers l'élément 0, c'est à dire  $\lim y_n = 0$ , d'où, on obtient

$$\begin{aligned} \lim \|A(y_n)\|_F &= \lim \frac{1}{\alpha_n} \|A(x_n)\|_F \\ &= \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1. \end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que  $A$  est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité

$$\lim y_n = 0 \Rightarrow \lim \|A(y_n)\|_F = 0,$$

ce qui affirme que la constante  $C = \|A\|$  est finie pour tout opérateur  $A$  linéaire et continu.

### Théorème 2

Un opérateur linéaire  $A$  est continu, si et seulement si, il est borné.

### Démonstration

- *Condition suffisante*

Supposons que l'opérateur  $A$  est borné alors, on a

$$\|A(x)\|_F \leq M\|x\|_E,$$

ou encore

$$\|A(x) - A(0)\|_F \leq M\|x - 0\|_E,$$

d'où la continuité de l'opérateur  $A$  au point 0. Autrement dit,  $\lim A(x) = A(0)$  quand  $\lim x = 0$ . Ce qui entraîne la continuité partout.

- *Condition nécessaire*

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  tels que

$$x \in \overline{B}(0, 1) = \{x \in E, \quad \|x\|_E \leq 1\},$$

et

$$y \in S(0, 1) = \{y \in E, \quad \|y\|_E = 1\}.$$

Il est clair que l'on a la relation

$$\|A(y)\|_F \leq \sup \|A(x)\|_F = \|A\|.$$

D'autres part, pour tout  $x \in E$  tel que  $x \neq 0$ , on a  $\frac{x}{\|x\|_E} \in S(0, 1)$  cela veut dire que l'on a

$$\|A\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\|_F \leq \|A\|,$$

ou encore

$$\frac{1}{\|x\|_E} \|A(x)\|_F \leq \|A\|,$$

ce qui implique la relation

$$\|A(x)\|_F \leq \|A\| \|x\|_E.$$

D'où l'opérateur  $A$  est borné, car la constante  $\|A\|$  est toujours finie pour les opérateurs  $A$  continus.

### Espaces isomorphes

Soient  $(E, \| \cdot \|_E)$  et  $(F, \| \cdot \|_F)$  deux espaces vectoriels normés,  $E$  et  $F$  sont dits isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$ , c'est à dire

- $A$  est bijectif sur  $E$  dans  $F$ .
- $A$  et  $A^{-1}$  sont des opérateurs continus.

### Espaces isométriques

Les espaces  $E$  et  $F$  sont dits linéairement isométriques, s'il existe une isométrie  $A$  appliquant  $E$  dans  $F$ , c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

### Remarque 2

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

### Normes équivalentes

Soit  $E$  un espace vectoriel muni de deux normes  $(E, \| \cdot \|_1)$  et  $(E, \| \cdot \|_2)$ , ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$ , telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de  $E$  dans  $E$  soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés  $(E, \| \cdot \|_1)$  et  $(E, \| \cdot \|_2)$ .

### Théorème 3

*Dans un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

### Démonstration

Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  d'où tout élément  $x \in E$  s'exprime d'une façon unique, sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Définissons une norme sur  $E$ , telle que pour tout  $x \in E$ , on a

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit  $\mathcal{N}$  une norme définie sur  $E$  alors, pour tout  $x, y \in E$ , tel que  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ , on a la relation

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| &\leq \mathcal{N}(x - y) \\ &= \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) e_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| \mathcal{N}(e_i). \end{aligned}$$

Cette inégalité montre la continuité de la norme  $\mathcal{N}$  sur  $E$  car, on a  $\lim \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$  quand  $\lim x = y$ .

Etant donné que la sphère  $S(0, 1) = \{x \in E; \|x\| = 1\}$  est un ensemble fermé et borné dans un espace  $E$  de dimension finie et  $\mathcal{N}(x)$  une fonction continue positive, alors cette dernière atteint ses bornes sur la sphère, c'est à dire

$$\exists M > 0, \exists m > 0, \text{ telle que } m \leq \mathcal{N}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq M,$$

ou encore

$$m \|x\| \leq \mathcal{N}(x) \leq M \|x\|.$$

### lemme 1

Soit  $x_n$  une suite de Cauchy dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  contient une sous suite  $x_{n_k}$  convergente vers  $x$  alors la suite  $x_n$  est aussi convergente vers le même élément  $x$ .

### Démonstration

Soit  $x_n$  une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon,$$

d'où en particulier pour  $n_k \geq N_\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_{n_k}\| &< \varepsilon \\ \Rightarrow \\ \lim_{n_k \rightarrow \infty} \|x_p - x_{n_k}\| &= \|x_p - x\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite  $x_n$  vers l'élément  $x$ .

**Lemme 2**

*Tout espace normé  $(E, \| \cdot \|)$  de dimension finie est complet*

**Démonstration**

Soit  $x_n$  une suite de Cauchy dans un espace de dimension finie cette dernière est bornée d'où, on peut extraire une sous suite  $x_{n_k}$  convergente vers  $x$  ce qui implique à son tour que la suite  $x_n$  est aussi convergente vers  $x$ . D'où l'espace  $E$  est complet.

**Corollaire 1**

*Soit  $F$  un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé  $E$ , alors  $F$  est complet dans  $E$ .*

En effet,  $F$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$  qui est complet et par conséquent  $F$  est complet dans  $E$ .

**Lemme 3**

*Tout espace Banach  $(E, \| \cdot \|)$  est fermé.*

**Démonstration**

Soit  $x_n$  une suite d'éléments de  $E$  convergente vers  $x$  alors,  $x_n$  est une suite de Cauchy dans  $E$  complet, d'où  $x \in E$ .

**Corollaire 2**

*Soit  $F$  un sous espace vectoriel complet d'un espace de normé  $E$ , alors  $F$  est fermé.*

En effet, soit  $x_0 \in \overline{F}$  il existe alors une suite  $x_n$  d'éléments de  $F$  convergente vers  $x_0$  dans  $E$ , cette suite  $x_n$  est de Cauchy dans  $F$ , comme  $F$  est complet cette dernière est convergente dans  $F$ , la limite étant unique d'où  $x_0 \in F$ . Autrement dit,  $F = \overline{F}$  c'est à dire  $F$  fermé.

**Corollaire 3**

*Tout sous espace  $F$  de dimension finie d'un espace normé  $(E, \| \cdot \|)$  est fermé.*



En effet, il est clair que d'après le corollaire 1 l'espace  $F$  est complet et d'après le corollaire 2 l'espace  $F$  est fermé.

### Remarque 3

Tout sous espace  $F$  de dimension infinie d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  n'est pas nécessairement fermé.

En effet, il suffit de prendre  $E = C([a, b])$  l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$  muni de la norme uniforme

$$\|\varphi\| = \max_{t \in [a, b]} \|\varphi(t)\|$$

et soit  $F$  l'ensemble des polynômes qui est un sous espace de  $C([a, b])$ , non fermé car d'après Weierstrass, on a

toute fonction continue sur  $[a, b]$  est une limite d'une suite uniformément convergente de Polynômes. Autrement dit, la fermeture de  $\overline{F}$  coïncide avec  $C([a, b])$ .

### Théorème 4

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés. L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  de tous les opérateurs linéaires continus sur  $E$  dans  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $L(E, F)$  l'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur  $E$  dans  $F$  de plus,  $\mathcal{L}(E, F)$  muni de la norme  $\|A\|$  est un espace normé.

### Démonstration

- Soit  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $\|A\| = 0$ , la relation de la continuité

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|,$$

nous donne la nullité de l'opérateur  $A$ , c'est à dire

$$A(x) = 0, \quad \forall x \in E.$$

D'où la relation

$$A = 0.$$

- Soit  $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(E, F)$  alors, on a  $A_1 + A_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ , c'est à dire

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1 + A_2\| \|x\|,$$

de plus, on a aussi

$$\begin{aligned}\|A_1(x) + A_2(x)\| &\leq \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\| \\ &\leq \|A_1\|\|x\| + \|A_2\|\|x\| \\ &\leq (\|A_1\| + \|A_2\|)\|x\|.\end{aligned}$$

Notons que  $\|A_1 + A_2\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

- Soit  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  alors, on a  $\lambda A \in \mathcal{L}(E, F)$ , c'est à dire

$$\|\lambda A(x)\| \leq \|\lambda A\|\|x\|,$$

de plus, on a aussi

$$\begin{aligned}\|\lambda A(x)\| &= |\lambda| \|A(x)\| \\ &\leq |\lambda| \|A\|\|x\|.\end{aligned}$$

Notons que  $\|\lambda A\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda| \|A\|.$$

D'autre part, on a la relation

$$\|A(x)\| \leq \|A\|\|x\|,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\|A(x)\| &= \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A(x)\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\|\|x\|.\end{aligned}$$

Notons que  $\|A\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\|,$$

ou encore

$$|\lambda| \|U\| \leq \|\lambda U\|.$$

Des deux inégalités précédentes, on déduit l'égalité

$$|\lambda| \|A\| = \|\lambda A\|.$$

### **Théorème 5**

Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.

### **Démonstration**

En effet, soit  $\{A_n\}$  une suite de Cauchy d'éléments de  $\mathcal{L}(E, F)$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \|A_p - A_q\| < \varepsilon,$$

alors, pour tout  $x \in E$ , on a

$$\begin{aligned} \|A_p(x) - A_q(x)\| &= \|(A_p - A_q)(x)\| \\ &\leq \|A_p - A_q\| \|x\| \\ &< \varepsilon \|x\|. \end{aligned}$$

D'où, on tire que  $\{A_n(x)\}$  est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach  $F$ , alors  $A_n(x)$  converge dans  $F$  vers un opérateur  $A(x)$ . Passons à la limite des deux membres, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|A_p(x) - A_q(x)\| = \|A(x) - A_q(x)\| < \varepsilon \|x\|, \quad \forall q \geq N_\varepsilon,$$

d'où l'opérateur  $B(x) = A(x) - A_q(x)$  est borné donc continu de  $E$  dans  $F$ , il est un élément de  $\mathcal{L}(E, F)$ , c'est à dire

$$\|A(x) - A_q(x)\| \leq \|A - A_q\| \|x\|,$$

Notons que  $\|A - A_q\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A - A_q\| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de la suite  $A_q$  vers  $A$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ . L'opérateur  $A$  est un élément de  $\mathcal{L}(E, F)$  comme différence de deux opérateurs continus

$$A(x) = B(x) - A_q(x) \in \mathcal{L}(E, F).$$

### **Dual topologique**

On appelle dual topologique de l'espace  $E$  et que l'on note  $E^*$  l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires continues  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

### **Remarque 4**

Le dual topologique  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est inclus dans le dual algébrique  $E^+ = L(E, \mathbb{K})$ .

## Bibliographie

- [1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir 1981.
- [2] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir 1974.
- [3] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.
- [4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie 2004.
- [5] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill New York 1973.