§1. Théorème de Hahn-Banach

Rappels

On rappelle les propriétés importantes que peuvent posséder les relations binaires entre les éléments d'un même ensemble E.

• Réflexivité

Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite réflexive dans E si, on a

$$\forall\, x \in E, \quad x\mathcal{R}x.$$

• Transitivité

Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite transitive dans E si, on a

$$\forall\, x, y, z \in E, \quad \text{si} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

• symétrie

Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite symétrique dans E si, on a

$$\forall\, x, y \in E, \quad \text{si} \quad x\mathcal{R}y \quad \Rightarrow \quad y\mathcal{R}x$$

• Antisymétrie

Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite antisymétrique dans E si, on a

$$\forall\, x, y \in E, \quad \text{si} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow x{=}y.$$

Relation d'ordre

Une relation d'ordre est une relation entre les éléments de l'ensemble E, qui est à la fois

• réflexive, transitive et antisymétrique dans E.

Souvent la relation d'ordre "$\mathcal{R}$ "est notée par " $\leq$ " et que l'on dit

$$x \text{ "est inférieur ou égal à " } y.$$

Relation d'ordre total

En général, une relation d'ordre sur un ensemble E ne permet pas de comparer tous les éléments de l'ensemble. Cependant, si pour n'importe quels deux éléments x et y de E, on a

$$x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x,$$

on dit que la relation est d'ordre est total.

Ensemble totalement ordonné

Un ensemble E est dit totalement ordonné s'il est muni d'une relation d'ordre total $(\leq)$.

Relation d'ordre partiel

Une relation qui n'est pas totalement ordonné est dite partiellement ordonnée.

Ensemble partiellement ordonné

Un ensemble qui n'est pas totalement ordonné, est dit partiellement ordonné.

Majorant d'un ensemble

Un sous ensemble A de E muni d'une relation d'ordre notée " $\leq$ " est dit majoré s'il existe un élément $M \in E$ tel que,

$$\forall\, a \in A, \text{ on a } a \leq M,$$

M est appelé majorant de A.

Minorant d'un ensemble

Un sous ensemble A de E muni d'une relation d'ordre notée " $\leq$ " est dit minoré s'il existe élément $m \in E$ tel que,

$$\forall\, a \in A, \text{ on a } m \leq a,$$

m est appelé minorant de A.

Ensemble borné

Un ensemble A est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.

Borne supérieure d'un ensemble

Le plus petit des majorants d'un ensemble A s'il existe est appelé borne supérieure de A et que l'on note $\sup A$. Autrement dit

$$\forall a \in A, \quad \text{on a} \quad a \leq \sup A,$$

de plus

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists a_0 \in A, \quad \sup A - \varepsilon < a_0.$$

Borne inférieure d'un ensemble

Le plus petit des minorants d'un ensemble A s'il existe est appelé borne inférieure de A et que l'on note $\inf A$. Autrement dit

$$\forall a \in A, \quad \text{on a} \quad \inf A \leq a,$$

de plus

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists a_0 \in A, \quad a_0 < \inf A + \varepsilon.$$

Maximum d'un ensemble

Un élément M de A est dit maximum de A ou plus grand élément de A s'il est un majorant de A. Autrement dit

$$M \in A, \ \forall \ a \in A, \quad \text{on a} \quad a \leq M \ .$$

Minimum d'un ensemble

Un élément m de A est dit minimum de A ou plus petit élément de A s'il est un minorant de A. Autrement dit

$$m \in A, \ \forall \ a \in A, \quad \text{on a} \quad m \leq a \ .$$

Maximal d'un ensemble

Un élément N de A est dit maximal de A s'il n'existe pas un élément de A plus grand que l'élément N. Autrement dit

$$N \in A, \ \text{si pour } a \in A, \ \text{on a} \quad N \leq a \quad \text{entraîne } N = a.$$

Minimal d'un ensemble

Un élément n de A est dit minimal de A s'il n'existe pas un élément de A plus petit que l'élément n. Autrement dit

$$n \in A, \text{ si pour } a \in A, \text{ on a } \; a \leq n \; \text{ entraîne } n = a.$$

Remarque 1

Notons que, tout élément maximum est un élément maximal, la réciproque est généralement fausse.

Prolongement d'une relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre dans un ensemble E et soit $\mathcal{R}'$ une relation définie sur un sous ensemble A de E telle que

$$\forall x, y \in A, \quad \text{on a } \; (x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y).$$

La relation $\mathcal{R}'$ est une relation d'ordre; la réflexivité, la transitivité et l'antisymétrie de $\mathcal{R}'$ résultent de celles de $\mathcal{R}$, on dit alors que $\mathcal{R}$ est un prolongement de $\mathcal{R}'$ ou bien la relation $\mathcal{R}$ prolonge de $\mathcal{R}'$ ou bien $\mathcal{R}'$ est une restriction de $\mathcal{R}$ à A.

Lemme de Zorn

Soit E un ensemble ordonné, si tout sous ensemble A de E totalement ordonné admet un majorant, alors E admet un élément maximal.

Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que l'application U définie sur E dans F est une application linéaire ou un opérateur linéaire si

$$\forall \; x, y \in E, \; \forall \; \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \text{on a } \; U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y).$$

Fonctionnelles linéaires

On appelle fonctionnelle linéaire tout opérateur linéaire U défini sur E à valeurs dans le corps des scalaires $\mathbb{K}$.

Remarque 2

L'ensemble de tous les opérateurs linéaires définis sur E dans F, et que l'on note $L(E, F)$, est un espace vectoriel sur le même corps $\mathbb{K}$, muni des opérations algébriques suivantes

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) \in L(E,F), \quad \forall\, U_1, U_2 \in L(E,F),$$

de plus

$$U_0(x) = \lambda U(x) \in L(E,F), \quad \forall\, U \in L(E,F),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Dual algébrique

On appelle dual algébrique de E et que l'on note E^+ l'ensemble des fonctionnelles linéaires $L(E,\mathbb{K})$.

Normes et semi-normes

Soit E un espace vectoriel, une fonction $\mathcal{N}$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dite

• Semi-additive, si

$$\forall\, x, y \in E, \quad \text{on a} \;\; \mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y).$$

• Positivement homogène, si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \quad \text{on a} \;\; \mathcal{N}(\lambda x) = \lambda \mathcal{N}(x).$$

• Homogène, si

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \text{on a} \quad \mathcal{N}(\lambda x) = \mid \lambda \mid \mathcal{N}(x).$$

Semi normes

Une semi norme est une fonction $\mathcal{N}$ définie sur E dans $\mathbb{R}$, semi-additive et homogène

Propriétés

• Une semi norme $\mathcal{N}$ définie sur E dans $\mathbb{R}$ passe toujours par l'origine

En effet, il suffit de prendre $\lambda = 0$ et utilisons l'homogénéité de la semi-norme $\mathcal{N}$, d'où

$$\mathcal{N}(0) = \mathcal{N}(0.x) = 0.\mathcal{N}(x) = 0.$$

• Une semi norme $\mathcal{N}$ définie sur E dans $\mathbb{R}$ est toujours positive

En effet,

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{N}(0) &= \mathcal{N}(x + (-x)) \\ &\leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 2\mathcal{N}(x). \end{aligned}$$

D'où la positivité de la norme

$$\mathcal{N}(x) \geq 0.$$

- Une semi norme $\mathcal{N}$ définie sur E dans $\mathbb{R}$ a la propriété suivante

$$\forall x, y \in E, \ | \mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y) | \leq \mathcal{N}(x-y).$$

En effet, la semi-additivité de la semi norme $\mathcal{N}$ entraîne

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &= \mathcal{N}(x-y+y) \\ &\leq \mathcal{N}(x-y) + \mathcal{N}(y) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité suivante

$$\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y) \leq \mathcal{N}(x-y)$$

de la même façon, on permute les éléments x et y avec le fait que l'on ait $\mathcal{N}(x-y) = \mathcal{N}(y-x)$, on obtient le résultat voulu.

Normes

On appelle norme toute semi-norme $\mathcal{N}$, définie sur E dans $\mathbb{R}$, vérifiant la condition

$$\mathcal{N}(x) = 0 \ \text{ entraîne } \ x = 0.$$

Prolongement

Une fonction g définie sur un ensemble E est dite prolongement d'une fonction f définie sur un sous ensemble F de E, si

$$f(x) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in F$$

Théorème de Hahn-Banach

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{N}$ une semi-norme définie sur E. Soit f_0 une fonctionnelle linéaire définie sur un sous espace vectoriel F de E, telle que

$$f_0(x) \leq \mathcal{N}(x), \quad \forall x \in F.$$

alors, il existe une fonctionnelle linéaire f, définie sur E tout entier prolongeant la fonctionnelle f_0 et vérifiant sur l'espace E la condition

$$f(x) \leq \mathcal{N}(x), \quad \forall x \in E.$$

Démonstration

Considérons l'ensemble HB de tous les couples (M, g) vérifiant les conditions suivantes

• L'ensemble M est un sous espace vectoriel de E contenant F, $M \subset E$ et $F \subset M$.

• La fonctionnelle g est linéaire définie sur M avec g un prolongement de f_0.

• La fonctionnelle g vérifie l'inégalité $g(x) \leq \mathcal{N}(x), \ \forall x \in M$.

L'ensemble HB n'est pas vide, car il contient au moins le couple (F, f_0),

$$(F, f_0) \in HB \Rightarrow HB \neq \emptyset.$$

Soit " $\leq$ " la relation d'ordre définie sur HB par

$$\begin{array}{c} (M_1, g_1) \leq (M_2, g_2) \\ \Leftrightarrow \\ M_1 \subset M_2 \ \text{ et } \ g_2 \ \text{ prolongement de } g_1. \end{array}$$

Soit HB_0 un sous ensemble totalement ordonné de l'ensemble HB alors, on a le lemme suivant

lemme 1

L'ensemble M_0 défini par

$$M_0 = \cup\{M, \ (M, g) \in HB_0\},$$

est un sous espace vectoriel de E.

En effet, si $x, y \in M_0$, il existe d'après la définition de M_0 des sous espaces M_1 et M_2 tels que $x \in M_1$ et $y \in M_2$ avec la condition

$$(M_1, g_1), (M_2, g_2) \in HB_0.$$

L'ensemble HB_0 étant totalement ordonné, alors les éléments (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont comparables. Autrement dit

$$(M_1, g_1) \leq (M_2, g_2),$$

d'où, de la relation $M_1 \subset M_2$, on a $x, y \in M_2$, l'ensemble M_2 étant un sous espace vectoriel, alors

$$\lambda x + \mu y \in M_2 \subset M_0$$

pour tout λ et μ de $\mathbb{R}$, c'est à dire que M_0 est un sous espace vectoriel.

Pour tout $x \in M_0$, il existe un sous espace vectoriel M, contenant x et une fonctionnelle g définie sur M avec $(M, g) \in HB_0$, la fonctionnelle g_0 définie sur le sous espace M_0 par $g_0(x) = g(x)$ pour tout $x \in M$ est linéaire, de plus, $(M_0, g_0) \in HB_0$ présente un majorant de l'ensemble HB_0. D'après le **lemme de Zorn**, l'ensemble HB admet un élément maximal. Soit $(M_{\max}, g_{\max})$ cet élément.

Premier cas

• Si $M_{\max} = E$, alors la fonction cherchée f n'est autre que $g_{\max}$.

Deuxième cas

• Si $M_{\max} \neq E$, alors il existe un élément $x_0 \in E$, tel que $x_0 \notin M_{\max}$ et $x_0 \notin M_0$, d'où tout sous espace de la forme $M + x_0$ en particulier $F + x_0$ n'est pas inclus dans $M_{\max}$ ni dans M_0.

Soit $G = F + x_0$ un sous espace vectoriel de E contenant F, dont ses éléments sont représentés sous la forme

$$F \subset G \quad \text{avec } G = \{x = \alpha x_0 + x' \quad \text{où} \quad x' \in F,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Lemme 2

Pour tout $x_1, x_2 \in F$, on a la relation

$$f_0(x_2) - \mathcal{N}(-x_0 + x_2) \leq -f_0(x_1) + \mathcal{N}(x_0 + x_1).$$

En effet, il est aisé de voir que l'on ait

$$\begin{aligned} f_0(x_1) + f_0(x_2) &= f_0(x_1 + x_2) \leq \mathcal{N}(x_1 + x_2) \\ &= \mathcal{N}(x_0 + x_1 - x_0 + x_2) \\ &\leq \mathcal{N}(x_0 + x_1) + \mathcal{N}(-x_0 + x_2), \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu

$$f_0(x_2) - \mathcal{N}(-x_0 + x_2) \leq -f_0(x_1) + \mathcal{N}(x_0 + x_1), \quad \forall x_1, x_2 \in F.$$

Soient A et B deux réels donnés par

$$A = \sup_{x_2 \in F} [f_0(x_2) - \mathcal{N}(-x_0 + x_2)] \leq \inf_{x_1 \in F} [-f_0(x_1) + \mathcal{N}(x_0 + x_1)] = B,$$

alors pour tout élément h_0, tel que $A \leq h_0 \leq B$, on définit sur G une fonctionnelle f par

$$f(x) = \alpha h_0 + f_0(x') \text{ avec } x = \alpha x_0 + x',\ x' \in F.$$

Lemme 3

La fonctionnelle f est linéaire sur G, de plus f est un prolongement de f_0.

En effet, pour tout $x, y \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$x = \alpha x_0 + x' \quad \text{et} \quad y = \beta x_0 + y',$$

ou encore

$$\lambda x + \mu y = (\lambda\alpha + \mu\beta) x_0 + \lambda x' + \mu y'.$$

D'où la composition par f nous donne

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= (\lambda\alpha + \mu\beta) h_0 + \lambda f_0(x') + \mu f_0(y') \\ &= \lambda(\alpha h_0 + f_0(x')) + \mu(\beta h_0 + f_0(y')) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

De plus, de la relation

$$f(x) = \alpha h_0 + f_0(x'), \quad \forall x \in G, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

alors pour $\alpha = 0$, on obtient $x = x'$ et f est un prolongement de f_0.

Lemme 4

La fonctionnelle f définie sur G vérifie la relation suivante

$$f(x) \leq \mathcal{N}(x), \quad x \in G$$

En effet, soit α un réel positif $\alpha > 0$, alors pour tout $x \in G$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha h_0 + f_0(x') \\ &\leq \alpha B + f_0(x') \\ &\leq \alpha[-f_0(\frac{x'}{\alpha}) + \mathcal{N}(x_0 + \frac{x'}{\alpha})] + f_0(x') \\ &= \mathcal{N}(\alpha x_0 + x') \\ &= \mathcal{N}(x). \end{aligned}$$

On a utilisé la fait que

$$B = \inf_{x_1 \in F}[-f_0(x_1) + \mathcal{N}(x_0 + x_1)] \quad \text{et} \quad \frac{x'}{\alpha} \in F.$$

Pour α un réel négatif $\alpha < 0$, alors pour tout $x \in G$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha h_0 + f_0(x') \\ &\leq \alpha A + f_0(x') \\ &\leq \alpha[f_0(-\frac{x'}{\alpha}) - \mathcal{N}(-x_0 + (-\frac{x'}{\alpha}))] + f_0(x') \\ &= f_0(-x') - \mathcal{N}(-\alpha x_0 - x'))] + f_0(x') \\ &= -f_0(x') + \mathcal{N}(\alpha x_0 + x'))] + f_0(x') \\ &= \mathcal{N}(\alpha x_0 + x') \\ &= \mathcal{N}(x). \end{aligned}$$

On a utilisé la fait que

$$A = \sup_{x_1 \in F}[-f_0(x_1) + \mathcal{N}(-x_0 + x_1)] \quad \text{et} \quad -\frac{x'}{\alpha} \in F.$$

D'où pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité suivante

$$f(x) \leq \mathcal{N}(x) \; \forall x \in G,$$

ce qui implique que l'élément $(G, f) \in HB$ car, on a $F \subset G$ et f prolonge f_0, de plus le couple (G, f) n'est pas un élément maximal. Contradiction avec l'hypothèse $M_{\max} \neq E$, ce qui donne le résultat voulu.

Remarque

La démonstration du théorème de Hahn-Banach se base sur le lemme fondamental de **Zorn**.

Bibliographie

[1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir 1981.

[2] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Elements de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir 1974.

[3] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.

[4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de Msila Algérie 2004.

[5] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill New York 1973.