Introduction générale sur les distributions

Notions générales

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un point x de Ω est désigné par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, sa norme euclidienne est donnée comme suit

$$|x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2 .$$

On munit l'ensemble $\mathbb{N}^n$ des multi-indices par les relations suivantes

- Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1!.\alpha_2!.....\alpha_n!.$$

- Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ de $\mathbb{N}^n$

$$\alpha \leq \beta \ \text{ veut dire que } \alpha_i \leq \beta_i \text{ pour tout } i = 1, 2, ..., n.$$

- Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ de $\mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n) \\ \alpha - \beta &= (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, ..., \alpha_n - \beta_n) \quad \text{si} \ \ \beta \leq \alpha, \end{aligned}$$

et pour tout points $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de Ω, on pose

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.....x_n^{\alpha_n}, \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^p = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{p!}{\alpha!} x^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Formule de Newton

Pour tout points $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de Ω, on a

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!} x^\alpha y^{\alpha - \beta}, \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Formule de Leibniz

Pour tout f et g de classe C^k la fonction produit de classe C^k et, on a

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} D^\alpha f D^{\alpha-\beta} g, \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |\alpha| \leq k.$$

Rappels sur les espaces $L^2(\Omega)$

Un espace fonctionnel normé où la norme est déduite d'un produit scalaire peut être construit à partir de l'ensemble des fonctions à carré sommable

Fonction à carré sommable

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ, on dit que la fonction f est à carré sommable sur Ω si l'intégrale

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx, \tag{1}$$

existe et est finie.

Espace $L^2(\Omega)$

L'espace $L^2(\Omega)$ est l'ensemble de toutes des fonctions à carré sommable.

Proposition

Le produit de deux fonctions f et g à carrée sommable est sommable.

En effet, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)| &\leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) \Rightarrow \\ \int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |g(x)|^2 \, dx < \infty. \end{aligned}$$

Produit scalaire dans $L^2(\Omega)$

Soient f et g deux fonctions à carré sommable, on définit le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, par la relation

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} dx. \tag{2}$$

Remarque 1

Toute suite de Cauchy converge pour la norme de $L^2(\Omega)$ où cette norme est déduite de son produit scalaire.

Espace de Hilbert $L^2(\Omega)$

L'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ est l'ensemble des classes des fonctions équivalentes à carré sommable muni du produit scalaire (2) et dont la norme est donnée par

$$\|f(x)\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Espaces $L^p(\Omega)$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont les ensembles des classes de fonctions de puissance $p^{ième}$ intégrables sur Ω, muni de la norme

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 2

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach, pour tout $1 \leq p < \infty$. Mais ils ne sont pas des espaces euclidien pour $p \neq 2$. En d'autre terme leurs normes ne sont pas déduites d'un produit scalaire.

Fonctions essentiellement bornées

Une fonction$f$ est dite essentiellement bornée sur Ω, s'il existe une constante M telle que sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \Omega.$$

La plus petite de ces constantes M est notée par

$$M_p = ess \sup |f(x)|$$

Espace $L^\infty(\Omega)$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur Ω, muni de la norme

$$\|f(x)\|_\infty = ess \sup |f(x)|.$$

Remarque 3

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Espaces de fonctions test $D(\Omega)$

Support d'une fonction

On appelle support d'une fonction $\varphi(x)$ et que l'on note $\operatorname{supp}\varphi$ le plus petit ensemble fermé de Ω en dehors duquel la fonction φ s'annule presque partout.

Espace de fonctions Test

On appelle espace de fonctions d'essai et que l'on note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions φ indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω. Autrement dit, l'ensemble des fonctions φ de l'espace $C^\infty(\Omega)$ telles que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, où K est un compact de Ω.

Remarque

L'espace $D(\Omega)$ muni des lois de compositions habituelles est une algèbre.

En effet, il suffit de voir que pour tout $\varphi, \psi \in D(\Omega)$, on a

$$\operatorname{supp}(\varphi\psi) = \operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi.$$

Exemple

Soit $\varphi(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

alors $\varphi(x)$ est un élément de $D(\mathbb{R}^n)$.

En effet, il aisé de voir que le support de la fonction $\varphi(x)$ est la boule unité $B(0,1)$, compact dans $\mathbb{R}^n$ et la fonction $\varphi(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ privé de la sphère unité $S(0,1)$. Pour tout point y de la sphère $S(0,1)$ et x intérieur dans la boule $B(0,1)$, on a

$$\lim_{x \to y} \varphi(x) = 0.$$

D'où la continuité de la fonction $\varphi(x)$ sur la sphère $S(0,1)$, alors sur tout $\mathbb{R}^n$.

Topologie de $D(\Omega)$.

La topologie de $D(\Omega)$ est identique à celle induite par $C_0^\infty(\overline{\Omega})$.

Suites convergentes dans $D(\Omega)$

Pour que la suite de fonctions $\varphi_j(x)$ d'éléments de $D(\Omega)$ converge pour la topologie de $D(\Omega)$ vers la fonction $\varphi(x)$ de $D(\Omega)$, il faut et il suffit que

- Il existe un compact K de Ω tel que $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset K$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la suite $D^\alpha\varphi_j(x)$ converge uniformément vers $D^\alpha\varphi(x)$

Densité de $D(\Omega)$

- L'espace $D(\Omega)$ considéré comme sous espace de $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}^*$ est partout dense dans $C^k(\overline{\Omega})$ pour la topologie de $C^k(\overline{\Omega})$.
- L'espace $D(\Omega)$ considéré comme sous espace de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ est partout dense dans $L^p(\Omega)$ pour la topologie de $L^p(\Omega)$.

Distributions sur Ω

On appelle distribution sur Ω toute forme linéaire T continue sur l'espace des fonctions test $D(\Omega)$. Autrement dit

$$T \in D'(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \;\; \forall\varphi \in D(\Omega),\ \varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle \text{ est linéaire de } D(\Omega) \text{ dans } \mathbb{R} \\ \bullet \;\; \text{Si } \varphi_j \to 0 \text{ dans } D(\Omega) \text{ alors } \left\langle T, \varphi_j\right\rangle \to 0 \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Espace de distributions

On appelle espace de distributions et que l'on note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions T sur Ω.

$$\begin{array}{rcl} D(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & T(\varphi) \end{array}$$

Topologie de $D'(\Omega)$

On dit que la suite de distributions $T_j \in D'(\Omega)$ converge vers la distribution T de $D'(\Omega)$.

Si pour toute fonction test φ de $D(\Omega)$, on a

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\,, \quad \forall\varphi \in D(\Omega).$$

Remarque

Toute fonction f de $L^2(\Omega)$ engendre une distribution $T_f \in D'(\Omega)$ définie par

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\ (x)\varphi(x)dx,\ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

En effet, la fonctionnelle T_f est linéaire sur $D(\Omega)$

$$T_f(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T_f(\varphi_1) + \beta T_f(\varphi_2).$$

La fonctionnelle T_f est continue sur $D(\Omega)$

Soit φ_j une suite qui converge vers φ dans $D(\Omega)$ alors, on doit avoir la convergence de la suite $\left\langle T_f, \varphi_j \right\rangle$ vers $\langle T_f, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{R}$. C'est à dire

$$\varphi_j \to 0 \text{ dans } D(\Omega) \text{ implique } \left\langle T_f, \varphi_j \right\rangle \to 0 \text{ dans } \mathbb{R},$$

alors exprimons le produit scalaire $\left\langle T_f, \varphi_j \right\rangle$

$$\begin{aligned} \left\langle T_f, \varphi_j \right\rangle &= \int_\Omega f(x)\varphi_j(x)dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left|\varphi_j(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M.\epsilon, \end{aligned}$$

on a

$$f \in L^2(\Omega) \Rightarrow \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M,$$

et

$$\left(\int_\Omega \left|\varphi_j(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Il est simple de constater que l'application

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \to & D'(\Omega) \\ f & \mapsto & T_f, \end{array}$$

est injective, voir que

$$T_f = 0 \text{ entraîne } f = 0$$

supposons que $T_f = 0$ alors, on obtient

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi \rangle &= \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in \overline{D(\Omega)} = L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Prenons $\varphi = f$ afin d'obtenir

$$\int_\Omega f^2(x)dx = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Dérivation des distributions

Soit T une distribution de $D'(\Omega)$ définie par une fonction f continûment dérivable

$$T(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,$$

la dérivée de T par rapport à x_i notée $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ est définie par

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx,$$

intégrant par partie en tenant compte du fait que $\varphi(x)$ est de $D(\Omega)$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) &= \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi(x)dx \\ &= \int_{\partial\Omega} f(x)\varphi(x)\eta_i d\sigma - \int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) &= -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx \\ &= -T(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)). \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Il est à remarquer que la fonctionnelle $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ est linéaire, continue elle ne dépend pas de la dérivée f' de la fonction f en général, on a la formule suivante

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^{\alpha}\varphi\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Dérivaton des distributions avec discontinuité

Soit u une fonction continue, dérivable au sens usuel sauf aux points a et b, où elle admet une discontinuité de première espèce, alors

$$u'_{D'} = \left[u'\right]_{\text{usuel}} + \sum_{i=1}^{n}[u(a_i+0) - u(a_i-0)]\delta_{a_i}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle u'_{D'}, \varphi\right\rangle &= -\left\langle u, \varphi'\right\rangle = -\int_c^d u(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\left(\int_c^a u(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx + \int_b^d u(x)\varphi'(x)dx\right) \\
&= -\left[u(x)\varphi(x)\right]_c^a + \int_c^a u'(x)\varphi(x)dx \\
&\quad -\left[u(x)\varphi(x)\right]_a^b + \int_a^b u'(x)\varphi(x)dx \\
&\quad -\left[u(x)\varphi(x)\right]_b^d + \int_b^d u'(x)\varphi(x)dx \\
&= -u(a-0)\varphi(a-0) + u(c)\varphi(c) + \int_c^a u'(x)\varphi(x)dx \\
&\quad -u(b-0)\varphi(b-0) + u(a+0)\varphi(a+0) + \int_a^b u'(x)\varphi(x)dx \\
&\quad -u(d)\varphi(d) + u(b+0)\varphi(b+0) + \int_b^d u'(x)\varphi(x)dx \\
&= u(a+0)\varphi(a) - u(a-0)\varphi(a) + u(b+0)\varphi(b) - u(b-0)\varphi(b) + \int_c^d u'(x)\varphi(x)dx \\
&\quad \int_c^d u'(x)\varphi(x)dx + (u(a+0) - u(a-0))\,\varphi(a) + (u(b+0) - u(b-0))\,\varphi(b) \\
&= \left\langle u' + (u(a+0) - u(a-0))\,\delta_a + (u(a+0) - u(a-0))\,\delta_b, \varphi\right\rangle.
\end{aligned}$$

D'où le résultat volu

$$u'_{D'} = \left[u'\right]_{\text{usuel}} + (u(a+0) - u(a-0))\, \delta_a + (u(a+0) - u(a-0))\, \delta_b.$$

Bibliographie

[1] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir 1974.

[2] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.

[3] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie 2004.

[4] **VO-KHAC KHOAN.** Distributions Analyse de Fourier Opérateurs aux dérivées partielles. tome1. Vuibert 1972.