§9. Recherche des solutions particulières des équations différentielles complètes de second ordre

Equation différentielle avec second membre un polynôme

Une équation différentielle complète avec second membre un polynôme s'écrit comme suit

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_2 t^2 + a_1 t + a_0. \quad (1)$$

Il est à remarquer que la solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle (1) est de la forme d'un polynôme de même degré que $P(t)$, c'est à dire

$$x_1(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + ... + b_2 t^2 + b_1 t + b_0, \quad (2)$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la solution $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= n b_n t^{n-1} + (n-1) b_{n-1} t^{n-2} + ... + 2 b_2 t + b_1, \\ \ddot{x}_1(t) &= n(n-1) b_n t^{n-2} + (n-1)(n-2) b_{n-1} t^{n-3} + ... + 2 b_2. \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète (1), on obtient par identification le système suivant

$$\begin{cases} C b_n = a_n, \\ B n b_n + C b_{n-1} = a_{n-1}, \\ A n(n-1) b_n + B(n-1) b_{n-1} + C b_{n-2} = a_{n-2}, \\ \vdots \\ 2 A b_2 + B b_1 + C b_0 = a_0. \end{cases}$$

Remarque 1

Tous les coefficients de la solution particulière $x_1(t)$ s'exprime en fonction du terme C en dénominateur et par conséquent, ce dernier doit être différent de zéro. Autrement dit, l'équation différentielle (1) doit contenir le terme C en $x(t)$ non nul.

Remarque 2

Si la constante $C = 0$. C'est à dire, l'équation différentielle (1) ne possède pas de terme en $x(t)$, l'identification des deux membres de l'équation (1) pour la même fonction $x_1(t)$ est incompatible. D'où la solution particulière $x_1(t)$ doit être sous la forme suivante

$$x_1(t) = t(b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + ... + b_2 t^2 + b_1 t + b_0). \tag{3}$$

Proposition 1

• *Si le terme C en $x(t)$ dans l'équation différentielle complète (1) est non nul, alors la solution particulière $x_1(t)$ est un polynôme de même degré que le second membre.*

Proposition 2

• *Si le terme C en $x(t)$ dans l'équation différentielle complète (1) est nul, alors la solution particulière $x_1(t)$ est un polynôme t fois un polynôme de même degré que le second membre.*

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 2t^2 - 4t + 1$$

Solution

Le terme C en $x(t)$ est égal à $2 \neq 0$, alors la solution particulière $x_1(t)$ est un polynôme de même degré que le polynôme du second membre

$$x_1(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0,$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2a_2 t + a_1, \\ \ddot{x}_1(t) &= 2a_2. \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient

$$-2a_2 t^2 + (2a_2 - 2a_1)t + 2a_2 + a_1 - 2a_0 = 2t^2 - 4t + 1,$$

par identification, on aura le système

$$\begin{cases} -2a_2 = 2 & \Rightarrow a_2 = -1, \\ 2a_2 - 2a_1 = -4 & \Rightarrow a_1 = 1, \\ 2a_2 + a_1 - 2a_0 = 1 & \Rightarrow a_0 = -1. \end{cases}$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = -t^2 + t - 1.$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (-t^2 + t - 1) + x_2(t).$$

Exemple 2
Résoudre l'équation différentielle incomplète suivante

$$\ddot{x} + \dot{x} = t^2 + 3t - 2$$

Solution
On remarque que le terme C en $x(t)$ est nul, alors la solution particulière $x_1(t)$ est un polynôme t fois un polynôme de même degré que le polynôme du second membre

$$x_1(t) = t(a_2t^2 + a_1t + a_0) = a_2t^3 + a_1t^2 + a_0t,$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 3a_2t^2 + 2a_1t + a_0, \\ \ddot{x}_1(t) &= 6a_2t + 2a_1. \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle incomplète, on obtient

$$3a_2t^2 + (6a_2 + 2a_1)t + 2a_1 + a_0 = t^2 + 3t - 2,$$

par identification, on aura le système

$$\begin{cases} 3a_2 = 1 & \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3}, \\ 6a_2 + 2a_1 = 3 & \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, \\ 2a_1 + a_0 = -2 & \Rightarrow a_0 = -3. \end{cases}$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 3t.$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle incomplète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 3t) + x_2(t).$$

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle incomplète suivante

$$\ddot{x} = 12t^2 - 6t + 2$$

Solution

On remarque que les termes C en $x(t)$ et B en $\dot{x}(t)$ sont nuls, alors la solution particulière $x_1(t)$ est un polynôme t^2 fois un polynôme de même degré que le polynôme du second membre

$$x_1(t) = t^2(a_2t^2 + a_1t + a_0) = a_2t^4 + a_1t^3 + a_0t^2,$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & 4a_2t^3 + 3a_1t^2 + 2a_0t, \\ \ddot{x}_1(t) & = & 12a_2t^2 + 6a_1t + 2a_0. \end{array}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle incomplète, on obtient

$$12a_2t^2 + 6a_1t + 2a_0 = 12t^2 - 6t + 2,$$

par identification, on aura le système

$$\begin{cases} 12a_2 = 12 \quad \Rightarrow a_2 = 1, \\ 6a_1 = -6 \ \Rightarrow a_1 = -1, \\ 2a_0 = 2 \quad \Rightarrow a_0 = 1. \end{cases}$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = t^4 - t^3 + t^2.$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle incomplète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (t^4 - t^3 + t^2) + x_2(t).$$

Equation différentielle avec second membre une exponentielle

Une équation différentielle complète avec second membre une exponentielle s'écrit comme suit

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = D\exp(\alpha t). \tag{4}$$

Il est à remarquer que la solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle (4) doit être une fonction en exponentielle de même forme que le second membre

$$x_1(t) = K\exp(\alpha t), \tag{5}$$

• **L'exposant du second membre n'est pas une racine de l'équation caractéristique**

Si l'exposant α du second membre $D\exp(\alpha t)$ de l'équation différentielle (4) n'est pas une racine de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (4), c'est à dire

$$A\alpha^2 + B\alpha + C \neq 0,$$

alors la solution $x_1(t)$ garde sa forme donnée par (5), les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= K\alpha\exp(\alpha t),\\ \ddot{x}_1(t) &= K\alpha^2\exp(\alpha t).\end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète (4), on obtient par identification la relation suivante

$$K(A\alpha^2 + B\alpha + C)\exp(\alpha t) = D\exp(\alpha t),$$

après simplification, il vient

$$K = \frac{D}{A\alpha^2 + B\alpha + C}, \quad \text{avec} \quad A\alpha^2 + B\alpha + C \neq 0.$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = \frac{D}{A\alpha^2 + B\alpha + C}\exp(\alpha t).$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{D}{A\alpha^2 + B\alpha + C} \exp(\alpha t) + x_2(t).$$

Exemple 4
Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$2\ddot{x} - 3\dot{x} - 3x = 5\exp(3t).$$

Solution
L'équation caractéristique de l'équation différentielle s'écrit aussitôt

$$2\lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$.

L'exposant du second membre $\alpha = 3$ de l'équation différentielle n'est pas une racine de l'équation caractéristique, d'où la solution particulière $x_1(t)$ est une fonction en exponentielle de même forme que le second membre

$$x_1(t) = K\exp(3t),$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 3K\exp(3t), \\ \ddot{x}_1(t) &= 9K\exp(3t). \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient par identification la relation suivante

$$K = \frac{5}{6}.$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = \frac{5}{6}\exp(3t).$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{5}{6}\exp(3t) + x_2(t).$$

• **L'exposant du second membre est une racine de l'équation caractéristique**

Il peut arriver dans l'équation différentielle (4) que l'exposant α du second membre $D\exp(\alpha t)$ de l'équation différentielle (4) soit égal à une des racines simples de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (4), c'est à dire

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0,$$

d'où il est impossible de calculer la constante K se trouvant dans la solution particulière (5).

Pour le faire, on utilise la méthode de variation des constantes

$$x_1(t) = K(t)\exp(\alpha t),$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (\dot{K} + K\alpha)\exp(\alpha t), \\ \ddot{x}_1(t) &= (\ddot{K} + 2\dot{K}\alpha + K\alpha^2)\exp(\alpha t). \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète (4), on obtient par identification la relation suivante

$$A\ddot{K} + (2A\alpha + B)\dot{K} = D.$$

La solution de cette équation différentielle de second ordre sans le terme en K est de la forme

$$K = C_1 t.$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = C_1 t\exp(\alpha t) = \frac{D}{2A\alpha + B}t\exp(\alpha t), \quad \text{avec} \;\; 2A\alpha + B \neq 0.$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{D}{2A\alpha + B} t \exp(\alpha t) + x_2(t).$$

Exemple 5
Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 4\exp(2t)$$

Solution
L'équation caractéristique de l'équation différentielle s'écrit aussitôt

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

L'exposant du second membre $\alpha = 2$ étant une racine simple de l'équation caractéristique, d'où on utilise la méthode de variation des constantes pour la solution particulière $x_1(t)$ donnée comme fonction en exponentielle de même forme que le second membre

$$x_1(t) = K(t)\exp(2t),$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (\dot{K} + 2K)\exp(2t), \\ \ddot{x}_1(t) &= (\ddot{K} + 4\dot{K} + 4K)\exp(2t). \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient par identification la relation suivante

$$\ddot{K} + \dot{K} = 4.$$

La solution de cette équation sans le terme en K est de la forme

$$K(t) = C_1 t.$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = 4t\exp(2t).$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 4t\exp(2t) + x_2(t).$$

• **L'exposant du second membre est une racine double de l'équation caractéristique**

Il peut arriver dans l'équation différentielle (4) que l'exposant α du second membre $D\exp(\alpha t)$ de l'équation différentielle (4) soit égal à une racine double de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (4), c'est à dire

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = (x + \frac{B}{2A}) = 0,$$

d'où il est impossible de calculer la constante K se trouvant dans la solution particulière (5).

Pour le faire, on utilise la méthode de variation des constantes

$$x_1(t) = K(t)\exp(\alpha t),$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (\dot{K} + K\alpha)\exp(\alpha t),\\ \ddot{x}(t) &= (\ddot{K} + 2\dot{K}\alpha + K\alpha^2)\exp(\alpha t).\end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète (4), on obtient par identification la relation suivante

$$A\ddot{K} = D.$$

La solution de cette équation différentielle de second ordre avec second membre une constante sans les termes en K et en $\dot{K}$, doit être de la forme

$$K = \frac{D}{2A}t^2.$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = \frac{D}{2A} t^2 \exp(\alpha t).$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{D}{2A} t^2 \exp(\alpha t) + x_2(t).$$

Exemple 6
Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 4 \exp(3t)$$

Solution
L'équation caractéristique de l'équation différentielle s'écrit aussitôt

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

L'exposant du second membre $\alpha = 3$ étant une racine double de l'équation caractéristique, d'où on utilise la méthode de variation des constantes pour la solution particulière $x_1(t)$ donnée comme fonction en exponentielle de même forme que le second membre

$$x_1(t) = K(t) \exp(3t),$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\dot{K} + 3K) \exp(3t), \\ \ddot{x}(t) &= (\ddot{K} + 6\dot{K} + 9K) \exp(3t). \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient par identification la relation suivante

$$\ddot{K} = 4.$$

La solution de cette équation sans le terme en K et en $\dot{K}$ est de la forme

$$K(t) = 2t^2.$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = 2t^2 \exp(3t).$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2t^2 \exp(3t) + x_2(t).$$

Remarque 3

Le cas où le second membre de l'équation différentielle complète (4) est une somme d'exponentielles, la solution particulière $x_1(t)$ de cette équation est la somme des solutions particulières $y_i(t)$ traitées séparément.

Exemple 7

Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = \exp(3t) + 3\exp t$$

Solution

Le second membre de l'équation différentielle est une somme de deux exponentielles, d'où pour l'a résoudre, on doit traiter les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \dot{x} - 2x &= \exp(3t), \\ \ddot{x} - \dot{x} - 2x &= 3\exp t. \end{aligned}$$

La première solution particulière $y_1(t)$ de la première équation est une fonction en exponentielle de même forme que le second membre

$$y_1(t) = K_1 \exp(3t),$$

d'où cette solution est donnée par

$$y_1(t) = \frac{1}{4} \exp(3t).$$

La deuxième solution particulière $y_2(t)$ de la deuxième équation est une fonction en exponentielle de même forme que le second membre

$$y_2(t) = K_2 \exp t,$$

d'où cette solution est donnée par

$$y_2(t) = -\frac{3}{2} \exp t.$$

La solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme des deux solutions particulières obtenues $y_1(t)$ et $y_2(t)$

$$x_1(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{4} \exp(3t) - \frac{3}{2} \exp t$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{1}{4} \exp(3t) - \frac{3}{2} \exp t + x_2(t).$$

Equation différentielle avec second membre produit d'une exponentielle et un polynôme

Une équation différentielle complète avec un second membre produit d'une exponentielle et un polynôme s'écrit comme suit

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = P(t)\exp(\alpha t) \tag{6}$$

Posons la solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle (6) sous la forme

$$x_1(t) = y(t)\exp(\alpha t), \tag{7}$$

où $y(t)$ est une fonction inconnue, les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (\dot{y} + \alpha y)\exp(\alpha t), \\ \ddot{x}_1(t) &= (\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \alpha^2 y)\exp(\alpha t). \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète (3), on obtient par identification la relation suivante

$$A(\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \alpha^2 y) + B(\dot{y} + \alpha y) + Cy = P(t),$$

ou encore

$$A\ddot{y} + (2\alpha A + B)\dot{y} + (A\alpha^2 + B\alpha + C)y = P(t). \tag{8}$$

L'équation différentielle (8) est une équation différentielle complète avec second membre un polynôme $P(t)$. D'où la solution $y(t)$ est simple à obtenir par identification.

- Si l'exposant α n'est pas une racine de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (6), alors le troisième terme du premier membre de l'équation (8) est non nul. D'où la solution de l'équation (8) prend la forme

$$y(t) = Q(t), \quad \text{avec} \;\; d^\circ Q(t) = d^\circ P(t).$$

- Si l'exposant α est une racine simple de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (6), alors le troisième terme du premier membre de l'équation (8) est nul. D'où la solution de l'équation (8) prend la forme

$$y(t) = tQ(t) \quad \text{avec} \;\; d^\circ Q(t) = d^\circ P(t).$$

• Si l'exposant α est une racine double de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (6), le deuxième et le troisième terme du premier membre de l'équation (8) sont nuls. D'où la solution de l'équation (8) prend la forme

$$y(t) = t^2 Q(t) \quad \text{avec} \;\; d^\circ Q(t) = d^\circ P(t).$$

Exemple 8

Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = (2t^2 + 1)\exp(2t).$$

Solution

L'équation caractéristique de l'équation différentielle s'écrit aussitôt

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

Posons la solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle sous la forme

$$x_1(t) = y(t)\exp(2t),$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (\dot{y} + 2y)\exp(2t), \\ \ddot{x}_1(t) &= (\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y)\exp(2t). \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient la relation suivante

$$\ddot{y} - y = 2t^2 + 1.$$

Le troisième terme du premier membre de cette équation est non nul, car l'exposant $\alpha = 2$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. D'où la fonction inconnue $y(t)$ prend la forme

$$y(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0,$$

ce qui implique par la suite la relation suivante

$$2a_2 - (a_2 t^2 + a_1 t + a_0) = 2t^2 + 1,$$

par identification, on aura le système

$$\begin{cases} -a_2 = 2 \quad \Rightarrow a_2 = -2, \\ -a_1 = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0, \\ 2a_2 - a_0 = 1 \quad \Rightarrow a_0 = -5. \end{cases}$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = y(t)\exp(2t) = (-2t^2 - 5)\exp(2t).$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (-2t^2 - 5)\exp(2t) + C_1\exp(t) + C_2\exp(3t).$$

Exemple 9
Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = (2t^2 + 1)\exp t.$$

Solution
L'équation caractéristique de l'équation différentielle s'écrit aussitôt

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

Posons la solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle sous la forme

$$x_1(t) = y(t)\exp t,$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (\dot{y} + y)\exp t, \\ \ddot{x}_1(t) &= (\ddot{y} + 2\dot{y} + y)\exp t. \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x_1}(t)$, $\dot{x_2}(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient la relation suivante

$$\ddot{y} - 2\dot{y} = 2t^2 + 1.$$

Le troisième terme du premier membre de cette équation est nul, car l'exposant $\alpha = 1$ est une racine de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. D'où la fonction inconnue $y(t)$ prend la forme

$$y(t) = t(a_2t^2 + a_1t + a_0),$$

ce qui implique par la suite la relation suivante

$$-6a_2t^2 + (6a_2 - 4a_1)t + 2a_1 - 2a_0 = 2t^2 + 1,$$

par identification, on aura le système

$$\begin{cases} -6a_2 = 2 & \Rightarrow a_2 = -\dfrac{1}{3}, \\ 6a_2 - 4a_1 = 0 & \Rightarrow a_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ 2a_1 - 2a_0 = 1 & \Rightarrow a_0 = -1. \end{cases}$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = y(t)\exp t = (-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t)\exp t$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t)\exp t + K_1\exp t + K_2\exp(3t).$$

Exemple 10

Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = (2t^2 + 1)\exp t.$$

Solution

L'équation caractéristique de l'équation différentielle s'écrit aussitôt

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Posons la solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle sous la forme

$$x_1(t) = y(t)\exp t,$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (\dot{y} + y)\exp t, \\ \ddot{x}_1(t) &= (\ddot{y} + 2\dot{y} + y)\exp t. \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient la relation suivante

$$\ddot{y} = 2t^2 + 1.$$

Le troisième et le deuxième terme du premier membre de cette équation sont nuls, car l'exposant $\alpha = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. D'où la fonction inconnue $y(t)$ prend la forme

$$y(t) = t^2(a_2t^2 + a_1t + a_0),$$

ce qui implique par la suite la relation suivante

$$12a_2t^2 + 6a_1t + 2a_0 = 2t^2 + 1,$$

par identification, on aura le système

$$\begin{cases} 12a_2 = 2 \quad \Rightarrow a_2 = \dfrac{1}{6}, \\ 6a_1 = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0, \\ 2a_0 = 1 \quad \Rightarrow a_0 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = y(t)\exp t = (\frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{2}t^2)\exp t$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (\frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{2}t^2)\exp t + (C_1t + C_2)\exp t.$$

Equation différentielle avec second membre une fonction trigonométrique

Une équation différentielle complète avec un second membre une fonction trigonométrique s'écrit comme suit

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = D_1 \sin\alpha t + D_2 \cos\alpha t \tag{9}$$

Il est à remarquer que la solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle (9) est une fonction trigonométrique de même forme que le second membre

$$x_1(t) = K_1 \sin\alpha t + K_2 \cos\alpha t, \tag{10}$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= K_1\alpha \cos\alpha t - K_2\alpha \sin\alpha t, \\ \ddot{x}_1(t) &= -K_1\alpha^2 \sin\alpha t - K_2\alpha^2 \cos\alpha t. \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} &A(-K_1\alpha^2 \sin\alpha t - K_2\alpha^2 \cos\alpha t) + B(K_1\alpha \cos\alpha t - K_2\alpha \sin\alpha t) \\ &+C(K_1 \sin\alpha t + K_2 \cos\alpha t) = D_1 \sin\alpha t + D_2 \cos\alpha t, \end{aligned}$$

après identification, on aura le système

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1(C - A\alpha^2) - K_2B\alpha = D_1, \\ K_1\alpha B + K_2(C - A\alpha^2) = D_2. \end{array} \right. \tag{11}$$

dont le déterminant est donné par

$$\Delta = (C - A\alpha^2)^2 + \alpha^2 B^2,$$

• Si le déterminant du système (11) n'est pas nul, alors les constantes K_1 et K_2 sont simples à calculer.

• Si le déterminant du système (11) est nul, alors il faut que l'on ait le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} (C - A\alpha^2) = 0 \ \Rightarrow C = A\alpha^2, \\ \alpha B = 0 \ \Rightarrow B = 0. \end{array} \right.$$

Le cas où le déterminant du système (11) est nul, c'est à dire $B = 0$ et $C = A\alpha^2$, le terme en $\dot{x}$ n'existe pas dans l'équation différentielle et la solution particulière $x_1(t)$ prend la forme suivante

$$x_1(t) = t(K_1 \sin \alpha t + K_2 \cos \alpha t) \tag{12}$$

Exemple 11

Résoudre l'équation différentielle complète suivante

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 2 \sin 3t + 5 \cos 3t$$

Solution

La solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle est une fonction de même forme que le second membre

$$x_1(t) = K_1 \sin 3t + K_2 \cos 3t,$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= 3K_1 \cos 3t - 3K_2 \sin 3t, \\ \ddot{x_1}(t) &= -9K_1 \sin 3t - 9K_2 \cos 3t. \end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x_1}(t)$, $\dot{x_2}(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -11K_1 + 3K_2 = 2, \\ -3K_1 - 11K_2 = 5. \end{cases}$$

Le déterminant Δ du système est non nul, $\Delta = 130 \neq 0$, alors les coefficients K_1 et K_2 sont comme suit

$$K_1 = -\frac{37}{130}, \quad K_2 = -\frac{49}{130}.$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = -\frac{37}{130} \sin 3t - \frac{49}{130} \cos 3t.$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = -\frac{37}{130}\sin 3t - \frac{49}{130}\cos 3t + x_2(t).$$

Exemple 12
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\ddot{x} + 4x = 3\cos 2t$$

Solution
Le fait que les termes $B = 0$ et $C = A\alpha^2$, La solution particulière $x_1(t)$ de l'équation différentielle est de la forme

$$x_1(t) = t(K_1 \sin 2t + K_2 \cos 2t),$$

les dérivées première et seconde des deux membres de la fonction $x_1(t)$ donnent

$$\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= (2K_1 t + K_2)\cos 2t - (2K_2 t - K_1)\sin 2t,\\
\ddot{x_1}(t) &= -(4K_1 t + 4K_2)\sin 2t - (4K_2 t - 4K_1)\cos 2t.
\end{aligned}$$

Portons les expressions $\ddot{x_1}(t)$, $\dot{x_2}(t)$ et $x_1(t)$ dans l'équation différentielle complète, on obtient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{c} -4K_2 = 0, \\ 4K_1 = 3. \end{array}\right. \Rightarrow K_2 = 0, \quad K_1 = \frac{3}{4}.$$

D'où la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = \frac{3}{4} t \sin 2t.$$

La solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle complète est la somme de la solution particulière $x_1(t)$ et la solution générale $x_2(t)$ de l'équation différentielle sans second membre

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{3}{4} t \sin 2t + x_2(t).$$

Remarque 5

Si le second membre de l'équation différentielle (9) est de la forme

$$K \sin^2 \alpha t \quad \text{ou} \quad K \cos^2 \alpha t,$$

la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = K_1 \sin^2 \alpha t + K_2 \cos^2 \alpha t + K_3 \sin \alpha t \cos \alpha t$$

Remarque 6

Si le second membre de l'équation différentielle (9) est de la forme

$$(D_1 \sin \alpha t + D_2 \cos \alpha t) \exp(\beta t),$$

la solution particulière $x_1(t)$ est donnée par

$$x_1(t) = (K_1 \sin \alpha t + K_2 \cos \alpha t) \exp(\beta t).$$

§7. Exercices sur les équations différentielles complètes de second ordre

Résoudre les équations différentielles de second ordre suivantes

1) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2t^2 - 12t + 11.$

2) $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 12\exp(3t).$

3) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = -4\exp(-2t).$

4) $\ddot{x} + 3\dot{x} = 12t + 4.$

5) $\ddot{x} - x = 8\exp(-3t) - 3\exp(2t).$

6) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 2\exp(2t).$

7) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = (-2t^2 + 4t + 1)\exp(-t).$

8) $\ddot{x} - 2\sqrt{3}\dot{x} + 3x = 2\sin t - 2\sqrt{3}\cos t.$

9) $4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 4\sin\frac{1}{2}t - 2\cos\frac{1}{2}t.$

10) $4\ddot{x} + 12\dot{x} + 9x = -4\sin t\exp(-\frac{3}{2}t).$

11) $\ddot{x} + 4x = 4\sin 2t + 8\cos 2t.$

12) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 13x = 13t^2 - 49t + 30.$

13) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = (4t - 4)\exp t.$

14) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 7x = 10\sin t - 2\cos t.$

15) $\ddot{x} + 2\sqrt{3}\dot{x} + 6x = 3t\exp(-\sqrt{3}t).$

§8. Réponses des équations différentielles complètes de second ordre

1) $x = t^2 - 3t + C_1 \exp t + C_2 \exp(2t)$.

2) $x = 3\exp(3t) + C_1 \exp(-t) + C_2 \exp(2t)$.

3) $x = C_1 \exp(-3t) + (-4t + C_2)\exp(-2t)$.

4) $x = 2t^2 + C_1 + C_2 \exp(-3t)$.

5) $x = \exp(-3t) - \exp(2t) + C_1 \exp(-t) + C_2 \exp t$.

6) $x = (t^2 + C_1 t + C_2)\exp(2t)$.

7) $x = (-\frac{1}{6}t^4 - \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2)\exp(-t)$.

8) $x = \sin t + (C_1 t + C_2)\exp(\sqrt{3}t)$.

9) $x = \sin \dfrac{1}{2}t + 2\cos \dfrac{1}{2}t + (C_1 t + C_2)\exp(\dfrac{1}{2}t)$.

10) $x = (\sin t + C_1 t + C_2)\exp(-\dfrac{3}{2}t)$.

11) $x = (2t + C_1)\sin 2t + (C_2 - t)\cos 2t$.

12) $x = t^2 - 3t + 1 + [C_1 \cos \dfrac{3\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \dfrac{3\sqrt{3}}{2}t]\exp(\dfrac{5}{2}t)$.

13) $x = [t - 1 + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t]\exp t$.

14) $x = \sin t - \cos t + [C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t]\exp(-2t)$.

15) $x = [t + C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t]\exp(-\sqrt{3}t)$.

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.