§8. Equations différentielles complètes de second ordre

Equation différentielle à coefficients constants

On appelle équation différentielle complète de second ordre à coefficients constants toute équation de la forme

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = f(t), \tag{1}$$

où $x(t)$ est la fonction inconnue de la variable indépendante t, les constantes A, B et C sont des réels donnés avec $A \neq 0$.

Equation différentielle sans second membre

Une équation différentielle sans second membre est une équation dont le second membre $f(t)$ est nul

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0. \tag{2}$$

Notons que si le coefficient A de l'équation (2) est nul, alors l'équation linéaire de premier ordre

$$B\dot{x} + Cx = 0, \tag{3}$$

admet la solution non nulle $x(t)$ donnée par

$$x(t) = K\exp(\lambda t), \tag{4}$$

où λ et K sont des constantes avec $K \neq 0$.

Par analogie avec l'équation différentielle (3), on suppose que l'équation différentielle sans second membre (2) admet la solution non nulle $x(t)$ donnée sous la forme exponentielle (4)

$$x = K\exp(\lambda t).$$

Portons les expressions des fonctions $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans l'équation différentielle (2), on obtient

$$K\exp(\lambda t)[A\lambda^2 + B\lambda + C] = 0.$$

La fonction $K\exp(\lambda t)$ étant non nulle, d'où il reste

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0. \tag{5}$$

Equation caractéristique

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle (2), le binôme donné par l'équation (5).

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

Equation caractéristique admet deux racines réelles distinctes

Soient λ_1 et λ_2 deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (2)

$$\lambda_1 = -\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \qquad \lambda_2 = -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\ .$$

Pour ces deux racines λ_1 et λ_2 l'équation différentielle sans second membre (2) admet deux solutions linéairement indépendantes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ données comme suit

$$x_1(t) = K_1\exp(\lambda_1 t) \qquad \text{et} \qquad x_2(t) = K_2\exp(\lambda_2 t).$$

Autrement dit, les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ vérifient l'équation différentielle sans second membre (2)

$$A\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Cx_1 = 0,$$

et

$$A\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Cx_2 = 0,$$

additionnons ces deux équations membre à membre, on obtient la fonction somme

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = K_1\exp(\lambda_1 t) + K_2\exp(\lambda_2 t).$$

Il est clair que cette fonction $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ est une solution générale de l'équation différentielle sans second membre (2), car la solution d'une équation différentielle de second ordre doit vérifier l'équation et contenir deux constantes arbitraires.

Exemple 1
Résoudre l'équation différentielle sans second membre suivante

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$$

Solution
L'équation caractéristique s'écrit aussitôt

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. D'où, on obtient la solution générale sous la forme

$$x = K_1 \exp t + K_2 \exp(-2t).$$

Equation caractéristique admet une racine double
Soit λ une racine double de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (2)

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{B}{2A}.$$

Pour cette racine double $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ l'équation différentielle sans second membre (2) admet la solution $x(t)$ donnée comme suit

$$x(t) = K \exp(\lambda t).$$

Autrement dit, la fonction $x(t)$ vérifie l'équation différentielle sans second membre (2), mais cette dernière n'est pas une solution générale car elle contient uniquement une seule constante. La méthode de variation des constantes nous propose la solution générale par la variation de la constante K. Autrement dit, une solution générale de la forme

$$x = K(t) \exp(\lambda t), \tag{6}$$

où $K = K(t)$ une fonction de la variable indépendante t à chercher alors, il vient

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{K} \exp(\lambda t) + K\lambda \exp(\lambda t) = (\dot{K} + \lambda K) \exp(\lambda t), \\
\ddot{x} &= (\ddot{K} + \lambda \dot{K}) \exp(\lambda t) + (\dot{K} + \lambda K)\lambda \exp(\lambda t) \\
&= \exp(\lambda t)[\ddot{K} + 2\lambda \dot{K} + \lambda^2 K].
\end{aligned}$$

Portons les expressions des fonctions $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans l'équation différentielle (2), on obtient

$$A\exp(\lambda t)[\ddot{K} + 2\lambda\dot{K} + \lambda^2 K] + B\exp(\lambda t)(\dot{K} + \lambda K) + CK\exp(\lambda t) = 0,$$

après division par $\exp(\lambda t)$, il vient

$$A\ddot{K} + (B + 2\lambda A)\dot{K} + (A\lambda^2 + B\lambda + C)K = 0.$$

Comme la valeur $\lambda = -\dfrac{B}{2A}$ est une racine double de l'équation caractéristique (5), alors il est évident que le second et le troisième terme du premier membre sont nuls, d'où il reste l'équation incomplète suivante

$$A\ddot{K} = 0 \Leftrightarrow \ddot{K} = 0 \Rightarrow \dot{K} = C_1 \Rightarrow K = C_1 t + C_2.$$

Portons cette expression dans la solution (6), on obtient la solution générale avec deux constante C_1 et C_2 donnée par

$$x = (C_1 t + C_2)\exp(\lambda t).$$

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle sans second membre suivante

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$$

Solution

L'équation caractéristique s'écrit aussitôt

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

dont les racines sont une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. D'où, on obtient la solution générale

$$x = (C_1 t + C_2)\exp(-t).$$

Equation caractéristique admet deux racines complexes

Soient λ_1 et λ_2 deux racines complexes de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (2)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \alpha + i\beta, \\ \lambda_2 &= -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \alpha - i\beta \end{aligned}$$

ce qui implique que les fonctions définies par

$$\begin{aligned} x_1(t) &= K_1 \exp(\lambda_1 t) \ = K_1 \exp[(\alpha + i\beta)t), \\ x_2(t) &= K_2 \exp(\lambda_2 t) = K_2 \exp[(\alpha - i\beta)t) \end{aligned}$$

représentent des solutions particulières de l'équation différentielle (2) dont la solution générale est donnée par

$$x = \exp(\alpha t)[(K_1 + K_2)\cos \beta t + i(K_1 - K_2)\sin \beta t],$$

pour faire disparaître i de la solution générale, il suffit de prendre

$$K_1 = a + ib \qquad \text{et} \qquad K_2 = a - ib,$$

d'où, on obtient

$$K_1 + K_2 = 2a \quad \text{et} \quad K_1 - K_2 = 2ib,$$

et la solution générale s'écrit sous la forme

$$x = \exp(\alpha t)[K_3 \cos \beta t + K_4 \sin \beta t],$$

ou encore sous la forme trigonométrique connue

$$x = K_5 \exp(\alpha t)\sin(\beta t + \varphi) \quad \text{avec} \quad K_5 \text{ et } \varphi \text{ sont deux constantes.}$$

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle sans second membre suivante

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = 0$$

Solution

L'équation caractéristique s'écrit aussitôt

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0,$$

dont les racines sont complexes $\lambda_1 = 3 + 2i$ et $\lambda_2 = 3 - 2i$. D'où, on obtient la solution générale

$$x = \exp(3t)[K_1 \cos 2t + K_2 \sin 2t],$$

ou encore sous la forme trigonométrique

$$x = K_3 \exp(3t)\sin(2t + \varphi)$$

Equations différentielles avec second membre

Une équation différentielle avec second membre est une équation dont le second membre $f(t)$ est non nul

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = f(t),$$

où $x(t)$ et $f(t)$ sont des fonctions de la variable indépendante t.

Le second membre de l'équation différentielle est une constante

Une équation différentielle dont le second membre est une constante s'écrit sous la forme

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = D.$$

Réécrivons cette équation de la façon suivante

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx - D = 0, \tag{7}$$

posons le changement de fonction suivant

$$y = Cx - D,$$

dérivons les deux membres de cette expression, on obtient

$$\dot{y} = C\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = C\ddot{x}.$$

L'équation différentielle (7) se ramène à une équation sans second membre

$$\frac{A}{C}\ddot{y} + \frac{B}{C}\dot{y} + y = 0.$$

Il est à remarquer que la solution de cette équation est simple pour obtenir la fonction $y(t)$, d'où l'on déduit la solution $x(t)$.

Exemple 4

Résoudre l'équation différentielle complète avec second membre

$$\ddot{x} - \dot{x} - 12x = 12.$$

Solution

Réécrivons l'équation sous la forme

$$\ddot{x} - \dot{x} - (12x + 12) = 0.$$

Prenons le changement de fonction suivant

$$y = 12x + 12,$$

portons la fonction $y(t)$ et ses dérivées $\dot{y}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ dans l'équation, on obtient

$$\ddot{y} - \dot{y} - 12y = 0.$$

D'où la solution générale de l'équation

$$y = C_1 \exp(-3t) + C_2 \exp(4t),$$

où encore

$$x = C_3 \exp(-3t) + C_4 \exp(4t) - 1.$$

- **Le second membre de l'équation différentielle est variable**

Une équation différentielle avec second membre variable est une équation dont le second membre $f(t)$ est une fonction dépendante uniquement de la variable indépendante t.

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = f(t)$$

Théorème

la solution générale $x(t)$ d'une équation différentielle avec second membre variable (1) *est la somme d'une solution particulière $x_1(t)$ de cette équation et de la solution générale $x_2(t)$ de la même équation sans second membre*

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Démonstration

Soit $x_1(t)$ une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre, alors

$$A\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Cx_1 = f(t).$$

Supposons que la fonction $x(t)$ soit la solution générale de l'équation différentielle (1) donnée sous la forme d'une somme

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Pour trouver la solution $x_2(t)$ il suffit de porter la solution générale $x(t)$ dans l'équation différentielle (1), on obtient

$$(A\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Cx_1) + (A\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Cx_2) = f(t). \tag{7}$$

La fonction $x_1(t)$ étant une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (1), alors il est aisé de voir que le premier terme du premier membre de l'équation (7) est égal à la fonction $f(t)$, d'où il reste le second terme du premier membre

$$A\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Cx_2 = 0.$$

Cette dernière représente la solution générale de l'équation différentielle sans second membre (2), d'où la solution générale de l'équation différentielle avec second membre (1) donnée par

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Exemple 5

Résoudre l'équation différentielle complète avec second membre

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \exp(5t).$$

Solution

Soit $x_1(t)$ une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre, donnée par

$$x_1(t) = \frac{1}{12}\exp(5t).$$

Il est aisé de trouver la solution générale de l'équation différentielle sans second membre $x_2(t)$ sous la forme

$$x_2(t) = K_1 \exp t + K_2 \exp(2t).$$

D'où, on obtient la solution générale de l'équation différentielle avec second membre comme suit

$$x(t) = K_1 \exp t + K_2 \exp(2t) + \frac{1}{12}\exp(5t).$$

§7. Exercices sur les équations différentielles complètes de second ordre

Résoudre les équations différentielles de second ordre suivantes

1) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0.$

2) $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = -2.$

3) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 12.$

4) $\ddot{x} + 3\dot{x} = 0.$

5) $\ddot{x} - x = 0.$

6) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0.$

7) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 1.$

8) $\ddot{x} - 2\sqrt{3}\dot{x} + 3x = 6.$

9) $4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 3.$

10) $4\ddot{x} + 12\dot{x} + 9x = 36.$

11) $\ddot{x} + 4x = 0.$

12) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 13x = 0.$

13) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 11.$

14) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 7x = 0.$

15) $\ddot{x} + 2\sqrt{3}\dot{x} + 6x = 0.$

§8. Réponses des équations différentielles complètes de second ordre

1) $x = C_1 \exp t + C_2 \exp(2t)$.

2) $x = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp(2t) + 1$.

3) $x = C_1 \exp(-2t) + C_2 \exp(-3t) + 2$.

4) $x = C_1 + C_2 \exp(-3t)$.

5) $x = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp t$.

6) $x = (C_1 t + C_2) \exp(2t)$

7) $x = (C_1 t + C_2) \exp(-t) + 1$

8) $x = (C_1 t + C_2) \exp(\sqrt{3}t) + 2$

9) $x = (C_1 t + C_2) \exp(\dfrac{1}{2}t) + 3$.

10) $x = (C_1 t + C_2) \exp(-\dfrac{3}{2}t) + 4$

11) $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$

12) $x = \exp(\dfrac{5}{2}t)[C_1 \cos \dfrac{3\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \dfrac{3\sqrt{3}}{2}t]$.

13) $x = \exp t[C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t] + \dfrac{11}{5}$.

14) $x = \exp(-2t)[C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t]$.

15) $x = \exp(-\sqrt{3}t)[C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t]$.

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.