§7. Equations différentielles incomplètes de second ordre

Equations incomplètes

On appelle équation différentielle incomplète de second ordre toute équation prenant l'une des formes des types suivants

Equations incomplètes du premier type

Une équation différentielle de second ordre est dite incomplète du premier type si elle est de la forme

$$\ddot{x} = f(t), \tag{1}$$

où t est la variable indépendante et $x(t)$ la fonction inconnue. Il est aisé de voir que la solution de l'équation (1) est simple.

En effet, il suffit réécrire l'équation sous la forme explicite par le changement des fonctions

$$u(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \tag{2}$$

dérivons les deux membres de cette expression, on aura

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

l'équation (1) devient une équation différentielle ordinaire sous la forme normale

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = f(t). \tag{3}$$

La résolution de l'équation (3) nous donne la solution $u(t)$ en fonction de la variable indépendante t par la formule

$$u(t) = \int f(t)dt = F(t) + C,$$

ou encore

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = F(t) + C. \tag{4}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4) par dt, et intégrons de ces deux membres, il vient

$$\int dx(t) = \int F(t)dt + Ct + C_1,$$

ou encore, on obtient la solution générale de l'équation (1) sous la forme suivante

$$x(t) = \int F(t)dt + C_1 t + C_2. \tag{5}$$

Remarque 1

Le second membre de l'équation incomplète du premier type dépend uniquement de la variable indépendante t.

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle incomplète du premier type suivante

$$\ddot{x} = 2t - 2$$

Solution

Réécrivons l'équation différentielle avec le changement de fonction $u(t) = \dfrac{dx}{dt}$ sous la forme normale

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = 2t - 2,$$

multiplication les deux membres de cette équation pardt, on obtient

$$\int du = \int (2t - 2)dt.$$

Après intégration des deux parties, il vient

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = t^2 - 2t + C_1,$$

ou encore

$$\int dx = \int (t^2 - 2t + C_1)dt.$$

D'où la solution générale de l'équation donnée

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + C_1 t + C_2.$$

Equations incomplètes du deuxième type

Une équation différentielle de second ordre est dite incomplète du deuxième type si elle est de la forme

$$\ddot{x} = f(x), \tag{6}$$

où $x(t)$ la fonction inconnue. La résolution de l'équation (6) se fait comme suit

Réécrivons l'équation sous la forme explicite par le changement des fonctions

$$u(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt},$$

dérivons les deux membres de cette expression, on aura

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

l'équation (6) devient une équation différentielle ordinaire sous la forme normale

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = f(x). \tag{7}$$

Multiplions les deux membres de cette équation différentielle par l'expression dx, on aura

$$\frac{du}{dt}dx = f(x)dx,$$

ou encore

$$\frac{dx}{dt}du = udu = f(x)dx. \tag{8}$$

Intégrons l'équation (8), il vient

$$\int udu = \int f(x)dx,$$

ou encore

$$\frac{1}{2}u^2 = F(x) + C.$$

D'où, on obient

$$u = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2F(x) + C_1},$$

que l'on peut ramener à une équation à variables séparables

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2F(x)+C_1}} = \int dt.$$

D'où la solution générale de l'équation (6), donnée sous la forme

$$x = \varphi(t).$$

Remarque 2

Le second membre de l'équation incomplète du deuxième type dépend uniquement de la fonction inconnue $x(t)$.

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle incomplète du deuxième type suivante

$$\ddot{x} = -x$$

Solution

Réécrivons l'équation différentielle avec le changement de fonction $u(t) = \dfrac{dx}{dt}$ sous la forme normale

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = -x,$$

multiplication les deux membres de cette équation pardx, on obtient

$$\int udu = \int -xdx.$$

Après intégration des deux parties, il vient

$$\frac{1}{2}u^2(t) = -\frac{1}{2}x^2 + C,$$

ou encore

$$u^2 = C_1 - x^2.$$

Autrement dit, on écrit

$$u = \frac{dx}{dt} = \sqrt{C_1 - x^2}, \quad \text{avec } \; C_1 - x^2 > 0,$$

que l'on peut ramener à une équation à variables séparables

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1 - x^2}} = dt.$$

D'où la solution générale de l'équation est donnée par

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} = t + C_2,$$

ou encore

$$x = \sqrt{C_1} \sin(t + C_2).$$

Equations incomplètes du troisième type

Une équation différentielle de second ordre est dite incomplète du troisième type si elle est de la forme

$$\ddot{x} = f(t, \dot{x}), \tag{9}$$

où $x(t)$ la fonction inconnue. La résolution de l'équation (9) se fait par le changement des fonctions

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = u(t),$$

dérivons les deux membres de cette expression, on aura

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \dot{u},$$

l'équation (9) devient une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\dot{u} = f(t, u). \tag{10}$$

La résolution de l'équation (10) nous donne la solution $u(t)$ en fonction de la variable indépendante t par la formule

$$u = F(t).$$

D'où la solution générale de l'équation (9) donnée sous la forme

$$x(t) = \int u(t)dt = \int F(t)dt.$$

Remarque 3

Le second membre de l'équation incomplète du troisième type dépend de la variable indépendante t et de la fonction dérivée $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle incomplète du troisième type suivante

$$t\ddot{x} = \dot{x} + t^4$$

Solution

Réécrivons l'équation sous la forme normale

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x} + t^4}{t} = f(t, \dot{x}), \quad t \neq 0.$$

Introduisons le changement de fonction $u = \dfrac{dx}{dt}$, on obtient

$$\dot{u} = \frac{u + t^4}{t}, \quad t \neq 0,$$

ce qui donne par la suite une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\dot{u} - \frac{1}{t}u = t^3,$$

dont la solution de l'équation homogène sans second membre est donnée par

$$u = Ct.$$

La méthode de la variation des constantes nous donne la solution de l'équation linéaire

$$u = \frac{1}{3}t^4 + C_1 t.$$

D'où la solution générale de l'équation est donnée par

$$x(t) = \int u(t)dt = \frac{1}{15}t^5 + \frac{C_1}{2}t^2 + C_2.$$

Equations incomplètes du quatrième type

Une équation différentielle de second ordre est dite incomplète du quatrième type si elle est de la forme

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \tag{11}$$

où $x(t)$ la fonction inconnue. La résolution de l'équation (11) se fait par le changement des fonctions

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = u(t),$$

dérivons des deux membres de cette expression, on aura

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u\frac{du}{dx},$$

l'équation (11) devient une équation différentielle ordinaire de la forme

$$u\frac{du}{dx} = f(x, u). \tag{12}$$

La résolution de l'équation (12) nous donne la solution $u(x)$ en fonction de x par

$$u = \frac{dx}{dt} = F(x).$$

D'ou la solution générale de l'équation (11) donnée sous la forme

$$\int \frac{dx}{F(x)} = \int dt.$$

Remarque 4

Le second membre de l'équation incomplète du quatrième type dépend de la fonction inconnue $x(t)$ et de la fonction dérivée $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.

Exemple 4

Résoudre l'équation différentielle incomplète du quatrième type suivante

$$\ddot{x}x = \dot{x}^2 + \dot{x}x^2.$$

Solution

Réécrivons l'équation sous la forme normale

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{x}x^2}{x} = f(x, \dot{x}), \quad x \neq 0.$$

Introduisons le changement de fonction $u = \dfrac{dx}{dt}$ et dérivons des deux membres de cette expression, on obtient

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u\frac{du}{dx},$$

l'équation devient une équation différentielle ordinaire de la forme

$$u\frac{du}{dx} = \frac{u^2 + ux^2}{x} = f(x, u),$$

ou encore une équation différentielle linéaire dont x est une variable indépendante

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = x,$$

dont la solution de l'équation homogène sans second membre est donnée par

$$u(x) = Cx.$$

La méthode de la variation des constantes nous donne la solution de l'équation linéaire

$$u = x^2 + C_1 x.$$

D'où la solution générale de l'équation est donnée par

$$u = \frac{dx}{dt} = x^2 + C_1 x \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x^2 + C_1 x} = \int dt,$$

ou encore

$$\frac{x}{x + C_1} = C_2 \exp(C_1 t).$$

Remarque 5

La solution de l'équation différentielle de second ordre incomplète du quatrième type contient deux constantes.

§7. Exercices sur les équations différentielles incomplètes de second ordre

Résoudre les équations différentielles incomplètes suivantes

1) $\ddot{x} = 0.$

2) $\ddot{x} = at + b.$

3) $\ddot{x} = \sin t + \cos 2t.$

4) $\ddot{x} = t \exp t.$

5) $\ddot{x} = \dfrac{1}{t}.$

6) $\ddot{x} = -\dfrac{g}{l}x.$

7) $\ddot{x} + a^2 x = 0.$

8) $\ddot{x} - a^2 x = 0.$

9) $x^{(3)} + 4\ddot{x} = 0.$

10) $x^{(4)} + 9\ddot{x} = 0.$

11) $\ddot{x} - \dot{x} = 0.$

12) $\ddot{x} = a\dot{x} + b.$

13) $\ddot{x} = \dot{x} + t.$

14) $\ddot{x} - \dot{x}^3 = 0.$

15) $\ddot{x} + \dot{x}^2 = -1.$

16) $x\ddot{x} + \dot{x}^2 = 2.$

17) $x\ddot{x} - \dot{x}^2 = 1.$

18) $x\ddot{x} + \dot{x}^3 = 0.$

19) $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0.$

20) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0.$

§7. Réponses des équations différentielles incomplètes de second ordre

1) $x = C_1 t + C_2.$

2) $x = \frac{a}{6}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + C_1 t + C_2.$

3) $x = -\sin t - \frac{1}{4}\cos 2t + C_1 t + C_2.$

4) $x = t\exp t - 2\exp t + C_1 t + C_2.$

5) $x = t\ln \mid t \mid -t + C_1 t + C_2.$

6) $x = C_1 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2).$

7) $x = C_1 \sin(at + C_2).$

8) $at = \ln(x + \sqrt{x^2 + C_1} + C_2).$

9) $x = C_1 \exp(-4t) + C_2 t + C_3..$

10) $x = C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t + C_3 t + C_4.$

11) $x = C_1 \exp t + C_2.$

12) $x = C_1 \exp(at) - \frac{b}{a}t + C_2.$

13) $x = C_1 \exp t - \frac{1}{2}t^2 + t + C_2.$

14) $x = -\sqrt{-2t + C_1} + C_2.$

15) $x = \ln \mid \sin(t - C_1) \mid +C_2.$

16) $x^2 = 2t^2 + C_1 t + C_2.$

17) $t + C_2 = C_1 \ln(\frac{x}{C_1} + \sqrt{\frac{x^2}{C_1^2} - 1})$.

18) $t = x \ln x + C_1 x + C_2$.

19) $x = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp(2t)$.

20) $x = \exp(-2t)[C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t]$.

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.