§5. Equations différentielles de Bernoulli et équations différentielles de Riccati

I. **Equations différentielles de Bernoulli**

On appelle équation différentielle de Bernoulli toute équation différentielle de la forme

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^{\alpha}, \tag{1}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues de la variable indépendante t, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou des constantes connues, $\alpha \in \mathbb{R}$ avec la condition

$$\alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha \neq 1.$$

Bien entendu, si $\alpha = 0$ l'équation différentielle (1) devient une équation différentielle linéaire avec second membre

$$\dot{x} + a(t)x = b(t),$$

et si $\alpha = 1$ l'équation différentielle (1) devient une équation différentielle linéaire sans second membre

$$\dot{x} + (a(t) - b(t))x = 0.$$

Transformation d'une équation différentielle de Bernoulli en une équation différentielle linéaire

Il est aisé de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Bernoulli (1) en une équation différentielle linéaire par les transformations suivantes.

1. Divisons tous les termes de l'équation différentielle (1) par x^{α}, on obtient
$$x^{-\alpha}\dot{x} + a(t)x^{1-\alpha} = b(t). \tag{2}$$

2. Faisons le changement de variables suivant
$$y = x^{1-\alpha}, \tag{3}$$

dérivons des deux membres de l'expression (3), on obtient

$$\dot{y} = (1-\alpha)x^{-\alpha}\dot{x} \ \Rightarrow x^{-\alpha}\dot{x} = \frac{\dot{y}}{1-\alpha} \ . \tag{4}$$

1. Substituons les transformations (3) et (4) dans l'équation différentielle (2) , il vient

$$\dot{y} + (1-\alpha)a(t)y = (1-\alpha)b(t). \tag{5}$$

Il est à remarquer que l'équation différentielle (5) est linéaire, simple à résoudre par les méthodes connues pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.

Exemple 1
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} + \frac{2}{t}x = \frac{e^t}{t^3\sqrt{x}}. \tag{6}$$

Solution
L'équation différentielle (6) est une équation différentielle de Bernoulli avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, divisons tous les termes l'équation différentielle (6) par $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, on obtient l'équation différentielle suivante

$$x^{\frac{1}{2}}\dot{x} + \frac{2}{t}x^{\frac{3}{2}} = \frac{e^t}{t^3}. \tag{7}$$

Introduisons la nouvelle fonction y donnée en fonction de x par la relation

$$y = x^{\frac{3}{2}}. \tag{8}$$

D'où la dérivée des deux membres de la fonction $y(t)$ nous donne

$$\dot{y} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\dot{x}. \tag{9}$$

Portons les expressions (8) et (9) dans l'équation différentielle (7) , on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\frac{2}{3}\dot{y} + \frac{2}{t}y = \frac{e^t}{t^3},$$

ou encore

$$\dot{y} + \frac{3}{t} y = \frac{3}{2} \frac{e^t}{t^3}. \tag{10}$$

Il aise de voir que l'équation différentielle (10) se résout par les méthodes connues pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.

La solution générale de l'équation différentielle (10) est donnée par

$$y(t) = \frac{C}{t^3} + \frac{3}{2} \frac{e^t}{t^3},$$

ou encore la solution générale de l'équation différentielle (6) est donnée par

$$x(t) = \left(\frac{C}{t^3} + \frac{3}{2} \frac{e^t}{t^3} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[2]{\left(\frac{C}{t^3} + \frac{3}{2} \frac{e^t}{t^3} \right)^2}.$$

II. **Equations différentielles de Riccati**

On appelle équation différentielle de Riccati toute équation différentielle de la forme

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^2 + c(t), \tag{11}$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions continues de la variable indépendante t, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou des constantes connues, avec la condition,

$$b(t) \neq 0 \quad \text{et} \quad c(t) \neq 0.$$

Bien entendu, si $b(t) = 0$ l'équation différentielle (11) devient une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\dot{x} + a(t)x = c(t),$$

et si $c(t) = 0$ l'équation différentielle (11) devient une équation différentielle de Bernoulli

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^2.$$

I. **Transformation d'une équation différentielle de Riccati en une équation différentielle de Bernoulli**

Il est simple de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Riccati (11) en une équation différentielle de Bernoulli par les transformations suivantes.

1. Connaissons une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle de Riccati (11).

2. Substituons le changement de variable

$$x(t) = x_p(t) + y(t). \tag{12}$$

Portons l'expression (12) dans l'équation différentielle de Riccati (11), on obtient une équation différentielle de Bernoulli de la forme

$$\dot{y} + A(t)y = b(t)y^2,$$

où $A(t)$ est la fonction continue donnée par

$$A(t) = a(t) - 2b(t)x_p(t).$$

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} + \frac{1}{t}x = \frac{x^2}{t^3} + 2t, \tag{13}$$

où l'équation différentielle (13) admet $x_p(t) = t^2$ comme solution particulière

Solution

L'équation différentielle (13) est une équation différentielle de Riccati, transformons cette équation différentielle en une équation différentielle de Bernoulli avec le changement de variables suivant

$$x(t) = x_p(t) + y(t) = t^2 + y(t). \tag{14}$$

Portons l'expression (14) dans l'équation différentielle de Riccati (13), on obtient une équation différentielle de Bernoulli de la forme

$$\dot{y} - \frac{1}{t}y = \frac{y^2}{t}. \tag{15}$$

Il est simple de résoudre l'équation différentielle (15) par les méthodes connues pour les équations différentielles de Bernoulli.

II. **Transformation d'une équation différentielle de Riccati en une équation différentielle linéaire**

Il est aisé de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Riccati (11) en une équation différentielle linéaire avec second membre par les transformations suivantes.

1. Connaissons une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle de Riccati (11).

2. Substituons le changement de variable

$$x(t) = x_p(t) + \frac{1}{y(t)}. \tag{16}$$

Portons l'expression (16) dans l'équation différentielle de Riccati (11), on obtient une équation différentielle linéaire non homogène de la forme

$$\dot{y} + A(t)y = b(t),$$

où $A(t)$ est la fonction continue donnée par

$$A(t) = a(t) + 2b(t)x_p(t).$$

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} + \frac{t^2}{1+t^3}x = -\frac{2tx^2}{1+t^3} - \frac{1}{1+t^3}, \tag{17}$$

où l'équation différentielle (17) admet $x_p(t) = -t$ comme solution particulière

Solution

L'équation différentielle (17) est une équation différentielle de Riccati, transformons cette équation différentielle en une équation différentielle linéaire avec le changement de variables suivant

$$x(t) = x_p(t) + \frac{1}{y(t)} = -t + \frac{1}{y(t)}. \tag{18}$$

Portons l'expression (18) dans l'équation différentielle de Riccati (17), on obtient une équation différentielle linéaire de la forme

$$\dot{y} + \frac{3t^2}{1+t^3}y = \frac{2t}{1+t^3}. \tag{19}$$

Il est simple de résoudre l'équation différentielle (19) par les méthodes connues pour les équations différentielles linéaires.

Remarque 1

Il n'est pas toujours évident de trouver la solution particulière de l'équation différentielle de Riccati.

Exemple 4
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} - x + x^2 = 4t^2 + 2t + 2 \tag{20}$$

Solution
On remarque que dans l'équation différentielle (20) les termes du premier membre sont semblables à ceux du second membre, il suffit donc de prendre le changement de variable suivant

$$x_p(t) = at + b. \tag{21}$$

Portons l'expression (21) dans l'équation différentielle (20) et égalons les coefficients des termes semblables, on trouve les constantes a et b.

$$a - (at + b) + \left(a^2t^2 + 2abt + b^2\right) = 4t^2 + 2t + 2. \tag{22}$$

Egalons les coefficients de même puissance de t dans les deux membres de l'équation (22), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ -a + 2ab = 2 \\ a - b + b^2 = 2 \end{cases} \tag{23}$$

Il est simple de voir que les valeurs $a = 2$ et $b = 1$ sont solutions du système (23). D'ou l'existence de la solution particulière $x_p(t)$ sous la forme polynomiale

$$x_p(t) = 2t + 1.$$

Utilisons le changement de variables (16), on obtient

$$x(t) = 2t + 1 + \frac{1}{y(t)}, \tag{24}$$

substituons l'expression (24) dans l'équation différentielle (20), afin d'obtenir une équation différentielle linéaire non homogène de la forme

$$\dot{y} + (-4t - 1)y = -1,$$

qui se résout par les méthodes connues pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.

Aussi, on peut mettre le changement de variables (12), on obtient

$$x(t) = 2t + 1 + y(t), \tag{25}$$

substituons l'expression (25) dans l'équation différentielle (20), afin d'obtenir une équation différentielle de Bernoulli de la forme

$$\dot{y} + (4t + 1)y = -y^2.$$

Remarque 2
Dans le cas de l'équation différentielle (20), la solution particulière $x_p(t)$ sous la forme polynomiale n'existe pas toujours.

Exemple 5
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} - x + x^2 = 4t^2 + 2t + 7 \tag{26}$$

Solution
On remarque que dans l'équation différentielle (26) les termes du premier membre sont semblables à ceux du second membre, il suffit donc de prendre le changement de variable suivant

$$x_p(t) = at + b. \tag{27}$$

Portons l'expression (27) dans l'équation différentielle (26) et égalons les coefficients des termes semblables, on trouve

$$a - (at + b) + \left(a^2t^2 + 2abt + b^2\right) = 4t^2 + 2t + 7. \tag{28}$$

Egalons les coefficients de même puissance de t dans les deux membres de l'équation (28), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ -a + 2ab = 2 \\ a - b + b^2 = 7 \end{cases} \tag{29}$$

Il est simple de vérifier que le système (29) n'admet pas de solution. D'où la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (26) n'existe pas sous la forme polynomiale.

Proposition 1

Etant donné une équation différentielle de Riccati de la forme

$$\dot{x} + \frac{B}{t}x = Ax^2 + \frac{C}{t^2}, \tag{30}$$

où A, B *et* C *sont des constantes, si de plus, on a*

$$(B+1)^2 \geq 4AC,$$

alors l'équation différentielle (30) *admet une solution particulière* $x_p(t)$ *de la forme*

$$x_p(t) = \frac{a}{t}. \tag{31}$$

En effet, portons l'expression $x_p(t) = \dfrac{a}{t}$ dans l'équation différentielle (30), on obtient

$$\frac{Aa^2 + (1-B)a + C}{t^2} = 0,$$

pour trouver la valeur de a, il faut que la condition $(B+1)^2 \geq 4AC$ soit remplie.

Proposition 2

Etant donné une équation différentielle de Riccati de la forme

$$\dot{x} - \frac{1}{2t}x = \frac{A}{t}x^2 + B, \tag{32}$$

où A *et* B *sont des constantes, alors cette équation différentielle se ramène à une équation différentielle à variables séparables par la substitution de la fonction suivante*

$$x = y\sqrt{t}. \tag{33}$$

En effet, portons l'expression $x(t) = y\sqrt{t}$ dans l'équation différentielle (32), on obtient

$$\dot{y}\sqrt{t} = Ay^2 + B,$$

ou encore

$$\frac{dy}{Ay^2 + B} = \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

§5. Exercices sur les équations différentielles de Bernoulli et les équations différentielles de Riccati

Résoudre les équations différentielles de Bernoulli et les équations différentielles de Riccati suivantes

1 $\dot{x} + 2x = 4x^3.$

2 $t\dot{x} + x = x^2 \ln t.$

3 $\dot{x} + 2tx + tx^4 = 0.$

4 $\dot{x} + x - x^2(\cos t - \sin t) = 0.$

5 $t\dot{x} - 2t^2\sqrt{x} = 4x.$

Trouver une solution particulière, et ramener chaque équation différentielle de Riccati à une équation différentielle de Bernoulli puis intégrer cette dernière.

6 $\dot{x} - 2tx + x^2 = 2 - t^2.$

7 $t^2\dot{x} + tx + t^2x^2 = 1.$

8 $2\dot{x} + x^2 - \dfrac{3}{t^2} = 0.$

9 $t\dot{x} - (2t+1)x + x^2 = -t^2.$

10 $\dot{x} - \dfrac{1}{2t}x = \dfrac{1}{t}x^2 + 1.$

§5. Réponses sur les équations différentielles de Bernoulli et les équations différentielles de Riccati

1 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2 + Ce^{4t}}}; \quad x = 0.$

2 $x = \dfrac{1}{\ln t + Ct + 1}; \quad x = 0.$

3 $\dfrac{1}{x^3} = -\dfrac{1}{2} + Ce^{3t^2}; \quad x = 0.$

4 $x = \dfrac{1}{-\sin t + Ce^t}; \quad x = 0.$

5 $x = t^4 \ln^2 Ct; \quad x = 0.$

6) Pour la solution particulière $x_p(t) = t + 1$ l'équation devient $\dot{x} + 2x = -x^2$.
Pour la solution particulière $x_p(t) = t - 1$ l'équation devient $\dot{x} - 2x = -x^2$.

7) Pour la solution particulière $x_p(t) = \dfrac{1}{t}$ l'équation devient $\dot{x} + \dfrac{3}{t}x = -x^2$.
Pour la solution particulière $x_p(t) = -\dfrac{1}{t}$ l'équation devient $\dot{x} - \dfrac{1}{t}x = -x^2$.

8) Pour la solution particulière $x_p(t) = -\dfrac{1}{t}$ l'équation devient $\dot{x} - \dfrac{1}{t}x = -\dfrac{x^2}{2}$.
Pour la solution particulière $x_p(t) = \dfrac{3}{t}$ l'équation devient $\dot{x} + \dfrac{3}{t}x = -\dfrac{x^2}{2}$.

9) Pour la solution particulière $x_p(t) = t$ l'équation devient $\dot{x} + \dfrac{1}{t}x = \dfrac{x^2}{t}$.
Pour la solution particulière $x_p(t) = t - 1$ l'équation devient $\dot{x} + \dfrac{1}{t}x = -\dfrac{x^2}{t}$.

10 $\arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} + C.$

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr