§5. Equations de Bernoulli et Equations de Riccati

Equations de Bernoulli

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle de la forme

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^n, \tag{1}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues de la variable indépendante t ou des constantes connues, avec la condition

$$n \neq 0 \ \text{ et } n \neq 1.$$

Bien entendu, si $n = 0$ l'équation (1) devient une équation linéaire avec second membre

$$\dot{x} + a(t)x = b(t),$$

et si $n = 1$ l'équation (1) devient une équation linéaire sans second membre

$$\dot{x} + (a(t) - b(t))x = 0.$$

Transformation d'une équation de Bernoulli à une équation linéaire

Il est aisé de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Bernoulli à une équation différentielle linéaire par les transformations suivantes.

- Divisons tous les termes de l'équation par x^n, on obtient

$$x^{-n}\dot{x} + a(t)x^{1-n} = b(t). \tag{2}$$

- Faisons le changement de variables suivant

$$y = x^{1-n}, \tag{3}$$

d'où la dérivée des deux membres de la fonction (3) donne

$$\dot{y} = (1-n)x^{-n}\dot{x}.$$

- Substituons ces transformations dans l'équation (2) , il vient

$$\dot{y} + (1-n)a(t)y = (1-n)b(t). \tag{4}$$

Il est à remarquer que l'équation différentielle (4) est linéaire, simple à résoudre par la méthode de variation des constantes.

Exemple 1
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} + \frac{2}{t}x = \frac{\exp t}{\sqrt{x}}. \tag{5}$$

Solution
L'équation différentielle (5) est de Bernoulli avec $n = -\dfrac{1}{2}$, divisons tous les termes par $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, on obtient l'équation suivante

$$x^{\frac{1}{2}}\dot{x} + \frac{2}{t}x^{\frac{3}{2}} = \exp t. \tag{6}$$

Introduisons la nouvelle fonction y donnée en fonction de x par la relation

$$y = x^{\frac{3}{2}},$$

d'où la dérivée des deux membres de la fonction $y(t)$ donne

$$\dot{y} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\dot{x}.$$

Portons ces expressions dans l'équation (6) , on est ramené à une équation linéaire avec second membre

$$\frac{2}{3}\dot{y} + \frac{2}{t}y = \exp t.$$

Il aise de voir que cette équation se résout par la méthode de variation des constantes

Equations de Riccati

On appelle équation de Riccati toute équation différentielle de la forme

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^2 + c(t), \tag{7}$$

ou encore

$$\dot{x} + a(t)x + b(t)x^2 = c(t),$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions continues de la variable indépendante t ou des constantes connues avec la condition

$$b(t) \neq 0 \text{ et } \; c(t) \neq 0.$$

Transformation d'une équation de Riccati à une équation de Bernoulli

Il est simple de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Riccati à une équation différentielle de Bernoulli par les transformations suivantes.

- Connaissons une solution particulière $x_1(t)$ de équation de Riccati.
- Substituons le changement de variable

$$x = x_1(t) + y,$$

pour aboutir à une équation de Bernoulli de la forme

$$\dot{y} + A(t)y = b(t)y^2,$$

où $A(t)$ est une fonction continue donnée par

$$A(t) = a(t) - 2b(t)x_1(t).$$

Transformation d'une équation de Riccati à une équation linéaire

Il est aisé de voir que l'on peut ramener l'équation différentielle de Riccati à une équation linéaire avec second membre par les transformations suivantes.

- Connaissons une solution particulière $x_1(t)$ de équation de Riccati.
- Substituons le changement de variable

$$x = x_1(t) + \frac{1}{y},$$

pour aboutir à une équation différentielle linéaire non homogène de la forme

$$\dot{y} + A(t)y = b(t),$$

où $A(t)$ est une fonction continue donnée par

$$A(t) = 2b(t)x_1(t) - a(t).$$

• Intégrons les équations obtenues par ces changements, suivant les cas connus, équations linéaires ou équations de Bernoulli.

Remarque 1
Il n'est pas toujours évident de trouver la solution particulière de l'équation de Riccati.

Exemple 2
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} - x + x^2 = 4t^2 + 2t + 2. \tag{8}$$

Solution
On remarque dans équation (8) que les termes du premier membre sont semblables à ceux du second membre, il suffit donc de prendre le changement de variable suivant

$$x = at + b. \tag{9}$$

Portons l'expression (9) dans l'équation (8) et égalons les coefficients des termes semblables, on trouve les constantes a et b.

Si la solution particulière du type donné existe, ce qui n'est pas toujours le cas, on trouve

$$a^2t^2 + (-a + 2ab)t + a - b + b^2 = 4t^2 + 2t + 2.$$

En égalant les coefficients de même puissance de t dans les deux membres, on obtient le système

$$\begin{cases} a^2 = 4, \\ -a + 2ab = 2, \\ a - b + b^2 = 2. \end{cases}$$

Il est simple de voir que les valeurs $a = 2$ et $b = 1$ sont solution de ce système.

D'ou l'existence de la solution particulière $x_1(t)$ sous forme polynômiale

$$x_1 = 2t + 1.$$

Soit le changement de variables suivant

$$x = x_1(t) + \frac{1}{y} = 2t + 1 + \frac{1}{y},$$

substituons cette expression dans l'équation différentielle (8), afin d'obtenir une équation linéaire non homogène de la forme

$$\dot{y} + (-4t - 1)y = -1,$$

qui se résout par la méthode de variation des constantes.

Comme, on peut mettre le changement de variables suivant

$$x = x_1(t) + y = 2t + 1 + y,$$

dans l'équation différentielle (8), afin d'obtenir une équation de Bernoulli de la forme

$$\dot{y} + (4t + 1)y = -y^2.$$

Proposition 1

Etant donné une équation de Riccati de la forme

$$\dot{x} = Ax^2 + \frac{B}{t}x + \frac{C}{t^2}, \tag{10}$$

où A, B et C sont des constantes, si de plus, on a

$$(B + 1)^2 \geq 4AC,$$

alors cette équation admet une solution particulière $x_1(t)$ de la forme

$$x_1(t) = \frac{a}{t}.$$

En effet, portons l'expression $x_1(t) = \dfrac{a}{t}$ dans l'équation (10), on obtient

$$\frac{Aa^2 + (B + 1)a + C}{t^2} = 0,$$

pour trouver la valeur de a, il faut que la condition $(B+1)^2 \geq 4AC$ soit remplie.

Proposition 2
Etant donné une équation de Riccati de la forme

$$\dot{x} - \frac{1}{2t}x = \frac{A}{t}x^2 + B, \tag{11}$$

où A et B sont des constantes, alors cette équation se ramène à une équation à variables séparables par la substitution de la fonction suivante

$$x = y\sqrt{t}.$$

En effet, portons l'expression $x(t) = y\sqrt{t}$ dans l'équation (11), on obtient

$$\sqrt{t}\dot{y} = Ay^2 + B,$$

ou encore

$$\frac{dy}{Ay^2 + B} = \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

§5. Exercices sur les équations de Bernoulli et équations de Riccati

Résoudre les équations de Bernoulli et les équations de Riccati suivantes

1 $\dot{x} + 2x = 4x^3$.

2 $t\dot{x} + x = x^2 \ln t$.

3 $\dot{x} + 2tx + tx^4 = 0$.

4 $\dot{x} + x - x^2(\cos t - \sin t) = 0$.

5 $t\dot{x} - 2t^2\sqrt{x} = 4x$.

Trouver une solution particulière, et ramener chaque équation de Riccati à une équation de Bernoulli puis intégrer cette dernière.

6 $\dot{x} - 2tx + x^2 = 2 - t^2$.

7 $t^2\dot{x} + tx + t^2x^2 = 1$.

8 $2\dot{x} + x^2 - \dfrac{3}{t^2} = 0$.

9 $t\dot{x} - (2t+1)x + x^2 = -t^2$.

10 $\dot{x} - \dfrac{1}{2t}x = \dfrac{1}{t}x^2 + 1$.

§5. Réponses des équations de Bernoulli et équations de Riccati

1 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2 + C\exp(4t)}}$; $x = 0$.

2 $x = \dfrac{1}{\ln t + Ct + 1}$; $x = 0$.

3 $\dfrac{1}{x^3} = -\dfrac{1}{2} + C\exp(3t^2)$; $x = 0$.

4 $x = \dfrac{1}{-\sin t + C\exp t}$; $x = 0$.

5 $x = t^4 \ln^2 Ct$; $x = 0$.

6) Pour $x_1(t) = t + 1$ l'équation devient $\dot{x} + 2x = -x^2$;
pour $x_1(t) = t - 1$ l'équation devient $\dot{x} - 2x = -x^2$.

7) Pour $x_1(t) = \dfrac{1}{t}$ l'équation devient $\dot{x} + \dfrac{3}{t}x = -x^2$;
pour $x_1(t) = -\dfrac{1}{t}$ l'équation devient $\dot{x} - \dfrac{1}{t}x = -x^2$.

8) Pour $x_1(t) = -\dfrac{1}{t}$ l'équation devient $\dot{x} - \dfrac{1}{t}x = -\dfrac{x^2}{2}$;
pour $x_1(t) = \dfrac{3}{t}$ l'équation devient $\dot{x} + \dfrac{3}{t}x = -\dfrac{x^2}{2}$.

9) Pour $x_1(t) = t$ l'équation devient $\dot{x} + \dfrac{1}{t}x = \dfrac{x^2}{t}$;
pour $x_1(t) = t - 1$ l'équation devient $\dot{x} + \dfrac{1}{t}x = -\dfrac{x^2}{t}$.

10 $\arctan(\dfrac{x}{\sqrt{t}}) = 2\sqrt{t} + C$.

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.