§4. Equations linéaires du premier ordre

Equation linéaire du premier ordre

On appelle équation linéaire du premier ordre toute équation différentielle linéaire par rapport à la fonction inconnue et sa dérivée. Autrement dit, les fonctions $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ sont du premier degré.

$$\dot{x} + a(t)x = b(t), \tag{1}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues de la variable indépendante t ou des constantes connues.

La méthode de variation des constantes est l'une des méthodes appliquées à la résolution de l'équation linéaire (1) , et que l'on donne de la façon suivante

• Intégrons d'abord l'équation différentielle homogène sans second membre à variables séparables correspondante

$$\dot{x} + a(t)x = 0. \tag{2}$$

• Remplaçons dans la solution générale de l'équation (2) la constante arbitraire C par la fonction inconnue $C(t)$.

• Portons cette nouvelle solution générale de l'équation homogène dans l'équation (1)

• Cherchons la fonction inconnue $C(t)$.

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} + x\tan t = \cos^2 t. \tag{3}$$

Solution

Intégrons l'équation différentielle homogène correspondante

$$\dot{x} + x\tan t = 0, \tag{4}$$

ce qui permet de séparer les variables et d'intégrer aussitôt

$$\frac{dx}{x} = -\tan t dt, \quad x \neq 0.$$

D'où la solution de l'équation homogène (4)

$$x = C \cos t. \tag{5}$$

Il faut voir maintenant que la solution (5) est une solution générale de l'équation (3) , à condition de considérer la constante $C = C(t)$ comme une fonction de la variable indépendante t et non comme une simple constante.

$$x = C(t) \cos t.$$

Portons cette nouvelle solution dans l'équation (3) , on trouve,

$$\dot{C}(t) \cos t - C(t) \sin t + C(t) \cos t \tan t = \cos^2 t. \tag{6}$$

Il est à remarquer que l'expression

$$-C(t) \sin t + C(t) \cos t \tan t = 0,$$

est nulle comme solution de l'équation homogène (4) d'où il reste

$$\dot{C}(t) = \cos t \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} = \cos t,$$

ce qui donne par la suite la fonction $C(t)$

$$C(t) = \sin t + C_1,$$

avec C_1 une constante arbitraire. D'où la solution générale de l'équation différentielle (3) est donnée par

$$x = \sin t \cos t + C_1 \cos t.$$

Remarque 1

La fonction $x = 0$ n'est pas une solution de l'équation linéaire (3), mais en est une pour l'équation homogène (4) et que l'on trouve dans sa solution générale (5) pour la constante $C = 0$.

Remarque 2

On peut trouver des équations différentielles non linéaires par rapport à la fonction $x(t)$ et deviennent linéaires lorsque, on permute la fonction cherchée et la variable indépendante.

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = \frac{x}{(x^2 - 2t)}, \tag{7}$$

où x est une fonction de la variable indépendante t.

Solution

On remarque que l'équation (7) n'est pas linéaire par rapport à la fonction $x(t)$, mais elle est linéaire par rapport la variable t ainsi que sa dérivée dt comme on le voit dans l'expression suivante

$$x\frac{dt}{dx} + 2t = x^2,$$

d'où si l'on prend t comme fonction cherchée et x comme variable indépendante, l'équation (7) devient linéaire et s'écrit sous la forme

$$\frac{dt}{dx} + \frac{2}{x}t = x, \quad \text{ou encore } t' + \frac{2}{x}t = x; \quad x \neq 0,$$

qui se résout comme l'équation (1).

Remarque 3

Certaines équations deviennent linéaires lorsque l'on fait un changement de variables convenable.

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\frac{\dot{x}}{\cos^2 x} + \tan x = \sin t. \tag{8}$$

Solution

Effectuons le changement de variables suivant

$$y = \tan x,$$

la dérivée des deux membres de l'équation donne

$$\dot{y} = \frac{\dot{x}}{\cos^2 x}$$

Par substitution de ces expressions l'équation différentielle (8) devient une équation linéaire

$$\dot{y} + y = \sin t,$$

qui se résout comme l'équation (1) .

§4. Exercices sur les équations linéaires du premier ordre

Intégrer les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes

1) $t\dot{x} - 2x = t^3 \cos t.$

2) $\dot{x} + x \tan t = \sec t = \dfrac{1}{\cos t}.$

3) $(t+1)\dot{x} = x + 2(t+1)^2.$

4) $(tx + 2\exp t)dt = tdx.$

5) $\dot{x} + x \cot t - \exp(\cos t) = 0; \quad x(\dfrac{\pi}{2}) = 0.$

6) $\dot{x} = \dfrac{x^3}{x^3 - (2-3x^2)t}.$

7) $\dot{x} = \dfrac{1}{2x(x^2+t)}.$

8) $x \ln x dt + (t - \ln x)dx = 0..$

9) $\dfrac{-2t^2}{\sin x} + (t \cot x)\dot{x} = 1.$

10) $(-2\sin x \exp(\cos x) - t \sin x)\dot{x} = 1.$

§4. Réponses des équations linéaires du premier ordre

1) $x = Ct^2 + t^2 \sin t; \quad t = 0.$

2) $x = \sin t + c \cos t.$

3) $x = (t+1)(2t+C); \quad t = -1.$

4) $x = t^2 \exp t + C \exp t; \quad t = 0.$

5) $x \sin t + \exp(\cos t) = C; \quad x \sin t + \exp(\cos t) = 1.$

6) $2t = Cx^3 \exp(\frac{1}{x^2}) + x^3; \quad x = 0.$

7) $C \exp x^2 - t - 1 = 0.$

8) $(t-1)x \ln x + x = C.$

9) $x = \arcsin(t^3 + Ct).$

10) $t = C \exp(-\cos x) + \exp(\cos x).$

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Laboratory of Pure and Applied Mathematics
and
Laboratory of Signals Analysis and Systems
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr