§4. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Equation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme

$$\dot{x} + a(t)x = b(t). \tag{1}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues de la variable indépendante t définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou des constantes connues.

Remarque 1

L'équation différentielle (1) est linéaire par rapport à la fonction inconnue $x(t)$ et sa dérivée $\dot{x}(t)$, c'est à dire les fonctions $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ sont du premier degré.

Equation différentielle homogène

on appelle équation différentielle homogène ou équation différentielle sans second membre toute équation différentielle de la forme

$$\dot{x} + a(t)x = 0. \tag{2}$$

Il est aisé de voir que l'équation différentielle homogène (2) est une équation différentielle à variables séparables qui se résout comme suit

$$\dot{x} + a(t)x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -a(t)x,$$

ou encore pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{x} &= -a(t)dt \Rightarrow \\
\ln|x| &= \int -a(t)dt + C_1 \Rightarrow \\
\ln|x| &= \int -a(t)dt + \ln C \Rightarrow \\
\ln\left|\frac{x}{C}\right| &= \int -a(t)dt.
\end{aligned}$$

D'où la solution de l'équation différentielle homogène (2) notée $x_h(t)$ est donnée par

$$x_h(t) = Ce^{\int -a(t)dt}; \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Remarque 2

La solution nulle $x(t) = 0$ se trouve parmi les solutions $x_h(t)$ si l'on convient de prendre pour la constante C la valeur $C = 0$.

Théorème 1

La solution générale de l'équation différentielle (1) *s'obtient par la somme de la solution générale* $x_h(t)$ *de l'équation différentielle homogène* (2) *et une solution particulière* $x_p(t)$ *de l'équation différentielle* (1).

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{4}$$

Démonstration

En effet, il suffit de vérifier que $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ est une solution de l'équation différentielle (1) avec $x_h(t)$ la solution de l'équation différentielle homogène (2) et $x_p(t)$ une solution particulière de l'équation différentielle (1).

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t) \Rightarrow \\
&\dot{x}_h(t) + \dot{x}_p(t) + a(t)\left(x_h(t) + x_p(t)\right) = b(t), \\
&\Big(\dot{x}_h(t) + a(t)x_h(t)\Big) + \Big(\dot{x}_p(t) + a(t)x_p(t)\Big) = 0 + b(t).
\end{aligned}$$

De plus, si $x_p(t)$ et $x(t)$ sont deux solutions de l'équation différentielle (1) alors la différence $x(t) - x_p(t)$ est une solution de l'équation différentielle homogène (2), c'est à dire

$$x_h(t) = x(t) - x_p(t),$$

ou encore

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Recherche de la solution particulière de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

I. **Méthode de la variation des constantes**

La méthode de la variation des constantes est l'une des méthodes appliquées à la résolution de l'équation différentielle (1) , et que l'on donne de la façon suivante

1. Intégrons d'abord l'équation différentielle homogène (2) à variables séparables dans un domaine de résolution $I \subset \mathbb{R}$

$$\dot{x} + a(t)x = 0.$$

2. Remplaçons dans la solution générale (3) de l'équation différentielle homogène (2) la constante arbitraire C par la fonction inconnue $C(t)$.

$$x_h(t) = C(t)e^{\int -a(t)dt}$$

1. Portons cette nouvelle solution générale $x_h(t)$ de l'équation différentielle homogène (2) dans l'équation différentielle (1)

2. Cherchons la fonction inconnue $C(t)$.

Remarque 3

La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre doit contenir une seule constante.

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$\dot{x} + x \tan t = \cos^2 t. \tag{5}$$

Solution

Intégrons l'équation différentielle homogène correspondante

$$\dot{x} + x \tan t = 0, \tag{6}$$

la séparation des variables de l'équation différentielle homogène (6), nous donne

$$\frac{dx}{x} = -\tan t dt, \quad x \neq 0.$$

D'où la solution générale de l'équation différentielle homogène (6)

$$x_h(t) = C \cos t. \tag{7}$$

Il faut chercher maintenant une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (5), en considérant la constante $C = C(t)$ comme une fonction de la variable indépendante t et non comme une simple constante.

$$x_p(t) = C(t) \cos t.$$

Portons cette nouvelle solution $x_p(t)$ dans l'équation (5) , on trouve,

$$\dot{C}(t) \cos t - C(t) \sin t + C(t) \cos t \tan t = \cos^2 t.$$

Il est à remarquer que l'expression

$$-C(t) \sin t + C(t) \cos t \tan t = 0,$$

est nulle comme solution de l'équation homogène (6), d'où il reste

$$\dot{C}(t) \cos t = \cos^2 t,$$

ou encore

$$\frac{dC}{dt} = \cos t$$

ce qui donne par la suite la fonction $C(t)$

$$C(t) = \sin t,$$

ou encore

$$x_p(t) = \sin t \cos t. \tag{8}$$

D'où la solution générale de l'équation différentielle (5) est donnée par

$$x() = x_h(t) + x_p(t) = C \cos t + \sin t \cos t.$$

II. Méthode d'identification avec le second membre

La méthode d'identification avec le second membre de l'équation différentielle linéaire du premier ordre est destinée à la résolution de l'équation différentielle (1) dont la fonction $a(t)$ est une constante $a(t) = a$ et le second membre $b(t)$ pend les formes suivantes

1. Le second membre $b(t)$ de l'équation différentielle (1) est un polynôme $P(t)$.
$$b(t) = P(t), \tag{9}$$
la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (1) prend la forme
$$x_p(t) = Q(t) \text{ avec } d^\circ Q(t) = d^\circ P(t). \tag{10}$$

2. Le second membre $b(t)$ de l'équation différentielle (1) est le produit d'un polynôme $P(t)$ et d'une fonction $e^{\alpha t}$ où $\alpha \neq -a$.
$$b(t) = P(t)e^{\alpha t} \text{ où } \alpha \neq -a, \tag{11}$$
la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (1) prend la forme
$$x_p(t) = Q(t)e^{\alpha t} \text{ avec } d^\circ Q(t) = d^\circ P(t). \tag{12}$$

3. Le second membre $b(t)$ de l'équation différentielle (1) est le produit d'un polynôme $P(t)$ et d'une fonction $e^{\alpha t}$ où $\alpha = -a$.
$$b(t) = P(t)e^{\alpha t} \text{ où } \alpha = -a, \tag{13}$$
la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (1) prend la forme
$$x_p(t) = tQ(t)e^{\alpha t} \text{ avec } d^\circ Q(t) = d^\circ P(t). \tag{14}$$

4. Le second membre $b(t)$ de l'équation différentielle (1) est le produit d'un polynôme $P(t)$ et d'une fonction $e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t + B\sin\beta t\right)$; $A, B \in \mathbb{R}$.
$$b(t) = P(t)e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t + B\sin\beta t\right), \tag{15}$$
la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (1) prend la forme
$$x_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}\left(K_1\cos\beta t + K_2\sin\beta t\right) \text{ où } d^\circ Q(t) = d^\circ P(t). \tag{16}$$

Exemple 2

Chercher la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$\dot{x} + 2x = t^2 + 1. \tag{17}$$

Solution

- $a(t) = 2$ et $b(t) = t^2 + 1$

Cherchons la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (17) sous la forme

$$x_p(t) = Q(t) = At^2 + Bt + C,$$

et portons cette solution $x_p(t)$ dans l'équation (17) , on trouve après identification

$$\begin{aligned} (2At + B) + 2\left(At^2 + Bt + C\right) &= t^2 + 1, \\ 2At^2 + (2A + 2B)t + 2B + 2C &= t^2 + 1. \end{aligned}$$

D'ou, on obtient

$$\begin{aligned} &2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \\ &2A + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}, \\ &2B + 2C = 1 \Rightarrow C = 1, \end{aligned}$$

ou encore la solution particulière $x_p(t)$ est donnée par

$$x_p(t) = \frac{1}{2}t^2 - -\frac{1}{2}t + 1. \tag{18}$$

Exemple 3

Chercher la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$\dot{x} - x = te^{-t}. \tag{19}$$

Solution

- $a(t) = -1$ et $b(t) = te^{\alpha t}$ avec $\alpha = -1 \neq -a = 1$

Cherchons la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (19) sous la forme

$$x_p(t) = Q(t)e^{-t} = (At + B)\, e^{-t},$$

et portons cette solution $x_p(t)$ dans l'équation (19) , on trouve après identification

$$\begin{aligned} &Ae^{-t} - (At + B)\, e^{-t} - (At + B)\, e^{-t} = te^{-t}, \\ &(-2At + A - 2B)\, e^{-t} = te^{-t}. \end{aligned}$$

D'ou, on obtient

$$\begin{aligned} &-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \\ &A - 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ou encore la solution particulière $x_p(t)$ est donnée par

$$x_p(t) = \left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right) e^{-t}. \tag{20}$$

Exemple 4

Chercher la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$\dot{x} - 3x = (t - 2)\, e^{3t}. \tag{21}$$

Solution

- $a(t) = -3$ et $b(t) = (t - 2)\, e^{\alpha t}$ avec $\alpha = -3 = -a = -3$

Cherchons la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (21) sous la forme

$$x_p(t) = tQ(t)e^{-t} = t\left(At^2 + Bt\right) e^{-t} = \left(At^2 + Bt\right) e^{-t};$$

et portons cette solution $x_p(t)$ dans l'équation (21) , on trouve après identification

$$(2At + B)\, e^{3t} + \left(3At^2 + 3Bt\right) e^{3t} - \left(3At^2 + 3Bt\right) e^{3t} = (t - 2)\, e^{3t},$$

ou encore

$$(-2At + B)\, e^{3t} = (t-2)\, e^{3t}.$$

D'ou, on obtient

$$\begin{aligned} &-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \\ &B = -2, \end{aligned}$$

ou encore la solution particulière $x_p(t)$ est donnée par

$$x_p(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 - 2t\right) e^{3t}. \tag{22}$$

Exemple 5

Chercher la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$\dot{x} - 2x = e^{2t} \sin 2t. \tag{23}$$

Solution

- $a(t) = -2$ et $b(t) = e^{\alpha t}\,\sin\beta t$ avec $\alpha = \beta = 2 = -a = 2$

Cherchons la solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle (23) sous la forme $x_p(t) = e^{2t}(K_1 \cos 2t + K_2 \sin 2t)$ et portons cette solution $x_p(t)$ dans l'équation (23), on trouve après identification

$$\begin{aligned} &e^{2t}(-2K_1 \sin 2t + 2K_2 \cos 2t) + e^{2t}(2K_1 \cos 2t + 2K_2 \sin 2t) - \\ &e^{2t}(2K_1 \cos 2t + 2K_2 \sin 2t) = e^{2t} \sin 2t, \Rightarrow \\ &e^{2t}(2K_2 \cos 2t - 2K_1 \sin 2t) = e^{2t} \sin 2t. \end{aligned}$$

D'ou, on obtient

$$\begin{aligned} 2K_2 &= 0 \Rightarrow K_2 = 0, \\ -2K_1 &= 1 \Rightarrow K_1 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ou encore la solution particulière $x_p(t)$ est donnée par

$$x_p(t) = \left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right) e^{3t}. \tag{24}$$

III. **Méthode du facteur intégrant**

La méthode du facteur intégrant consiste à multiplier l'équation différentielle (1) par une fonction non nulle $\mu(t)$ afin de rendre l'équation différentielle (1) une équation facile à résoudre. La fonction $\mu(t)$ est appelée facteur intégrant.

1. Multiplions l'équation différentielle (1) par une fonction $\mu(t) \neq 0$,

$$\mu(t)\dot{x} + \mu(t)a(t)x = \mu(t)b(t). \tag{25}$$

2. Choisissons le facteur intégrant $\mu(t)$ de telle sorte que

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)x(t)\right) = \mu(t)b(t). \tag{26}$$

Après intégration des deux membres de l'équation (26), on obtient la solution de l'équation différentielle (1)

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)b(t)dt \tag{27}$$

Pour la recherche du facteur intégrant $\mu(t)$ égalons les deux équations différentielles (25) et (26), il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\mu(t)x(t)\right) = \mu(t)\dot{x}(t) + \mu(t)a(t)x(t),\\
&\mu(t)\dot{x}(t) + \dot{\mu}(t)x(t) = \mu(t)\dot{x}(t) + \mu(t)a(t)x(t),\\
&\dot{\mu}(t)x(t) = \mu(t)a(t)x(t)\\
&\dot{\mu}(t) = \mu(t)a(t),\\
&\ln|\mu(t)| = \int a(t)dt
\end{aligned}$$

D'où, on obtient une infinité de facteur intégrant $\mu(t)$ donné par

$$\mu(t) = Ce^{\int a(t)dt}, \tag{28}$$

choisissons $C = 1$ dans l'équation (28), alors le facteur intégrant $\mu(t)$ prend la forme

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt}. \tag{29}$$

Exemple 6

Chercher la solution $x(t)$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$\dot{x} - 2tx = -t. \tag{30}$$

Solution

Le facteur intégrant $\mu(t)$ est donné par

$$\mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}. \tag{31}$$

Multiplions les deux membres de l'équation différentielle (30) par le facteur intégrant $\mu(t) = e^{-t^2}$, on obtient

$$e^{-t^2}\dot{x} - e^{-t^2}2tx = -te^{-t^2}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2}x\right) = -te^{-t^2}, \tag{32}$$

après intégration des deux membres de l'équation différentielle (32), il vient

$$\begin{aligned} e^{-t^2}x(t) &= \int -te^{-t^2}dt \Rightarrow \\ x(t) &= e^{t^2}\left(\frac{1}{2}e^{-t^2} + C\right). \end{aligned}$$

D'où la solution générale $x(t)$ de l'équation différentielle (30)

$$x(t) = Ce^{t^2} + \frac{1}{2}.$$

Remarque 3

On peut trouver des équations différentielles non linéaires par rapport à la fonction $x(t)$ et deviennent linéaires lorsque, on permute la fonction cherchée $x(t)$ et la variable indépendante t.

Exemple 7

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = \frac{x}{(x^2 - 2t)}, \tag{33}$$

où x est une fonction de la variable indépendante t.

Solution

On remarque que l'équation différentielle (33) n'est pas linéaire par rapport à la fonction $x(t)$, mais elle est linéaire par rapport la variable t ainsi que sa dérivée dt comme on le voit dans l'expression suivante

$$\frac{dt}{dx} = \frac{(x^2 - 2t)}{x},$$

ou encore

$$x\frac{dt}{dx} + 2t = x^2,$$

d'où si l'on prend t comme fonction cherchée et x comme variable indépendante, l'équation différentielle (33) devient linéaire et s'écrit sous la forme

$$\frac{dt}{dx} + \frac{2}{x}t = x,$$

ou encore

$$t' + \frac{2}{x}t = x; \quad x \neq 0,$$

qui se résout par les méthodes connues des équations différentielles linéaires du premier ordre.

Remarque 5

Certaines équations différentielles deviennent linéaires lorsque l'on fait un changement de variables convenable.

Exemple 8

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\frac{\dot{x}}{\cos^2 x} + \tan x = \sin t. \tag{34}$$

Solution

Effectuons le changement de variables suivant

$$y = \tan x, \tag{35}$$

la dérivée des deux membres de l'équation (35) donne

$$\dot{y} = \frac{\dot{x}}{\cos^2 x}. \tag{36}$$

Par substitution des expressions (35) et (36) dans l'équation différentielle (34), on obtient une équation différentielle linéaire

$$\dot{y} + y = \sin t,$$

qui se résout par les méthodes connues des équations différentielles linéaires du premier ordre.

Principe de superposition des solutions particulières

La solution particulière $x_p(t)$ de l'équation différentielle linéaire

$$\dot{x} + a(t)x = b_1(t) + b_2(t), \tag{37}$$

s'obtient par la somme des solutions particulières $y_p(t)$ et $z_p(t)$

$$x_p(t) = y_p(t) + z_p(t), \tag{38}$$

où $y_p(t)$ est la solution particulière de l'équation différentielle

$$\dot{x} + a(t)x = b_1(t), \tag{39}$$

et $z_p(t)$ la solution particulière de l'équation différentielle

$$\dot{x} + a(t)x = b_2(t). \tag{40}$$

Remarque 6
Le principe de superposition des solutions particulières peut se généraliser à des somme finies des solutions particulières.

§4. Exercices sur les équations différentielles linéaires du premier ordre

Intégrer les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes

1) $t\dot{x} - 2x = t^3 \cos t.$

2) $\dot{x} + x \tan t = \sec t = \dfrac{1}{\cos t}.$

3) $(t+1)\dot{x} = x + 2(t+1)^2.$

4) $(tx + 2e^t)dt = tdx.$

5) $\dot{x} + x \cot t - e^{\cos t} = 0; \quad x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

6) $\dot{x} = \dfrac{x^3}{x^3 - (2 - 3x^2)t}.$

7) $\dot{x} = \dfrac{1}{2x(x^2 + t)}.$

8) $x \ln x dt + (t - \ln x)dx = 0..$

9) $\dfrac{-2t^2}{\sin x} + (t \cot x)\dot{x} = 1.$

10) $\left(-2 \sin x e^{\cos x} - t \sin x\right) \dot{x} = 1.$

§4. Réponses des équations différentielles linéaires du premier ordre

1) $x = Ct^2 + t^2 \sin t; \quad t = 0.$

2) $x = C \cos t + \sin t.$

3) $x = (t+1)(2t + C); \quad t = -1.$

4) $x = Ce^t + t^2 e^t; \;\; t = 0.$

5) $x \sin t + e^{\cos t} = C; \quad x \sin t + e^{\cos t} = 1.$

6) $2t = Cx^3 e^{\frac{1}{x^2}} + x^3; \quad x = 0.$

7) $Ce^{x^2} - t - 1 = 0.$

8) $(t-1)x \ln x + x = C.$

9) $x = \arcsin(t^3 + Ct).$

10) $t = Ce^{-\cos x} + e^{\cos x}.$

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr