Différentiabilité sur $\mathbb{R}^n$

Différentiabilité d'une fonction

Soit $\mathbb{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une application définie sur $\mathbb{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

$$f: \quad U \to \mathbb{R}^m$$

On dit que f est différentiable en un point $a \in \mathbb{U}$ s'il existe une application linéaire notée L définie dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} L: \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & h \mapsto L(h), \end{aligned}$$

et une application notée ε définie dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \varepsilon: \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & h \mapsto \varepsilon(h), \end{aligned}$$

telles que les conditions suivantes sont satisfaisantes

(1) $\quad f(a+h) - f(a) = L(h) + \parallel h \parallel \varepsilon(h)$

(2) $\quad \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$

L'application linéaire L est dite différentielle de f au point $a \in \mathbb{U}$.

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathbb{U} \sqsubseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la fonction f est dite différentiable au point $a \in \mathbb{U}$ si et seulement si les fonctions coordonnées $f_1, f_2, ..., f_m$ le sont en ce point et, on a

$$L(h) = (L_1(h), L_2(h), ..., L_m(h))^T \text{ où } h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration

Voir les cours d'analyse

Remarque

Si la fonction f est différentiable au point a de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{R}^m$, alors

$$L_i(h) = \nabla f_i(a).h, \text{ avec } h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

d'où la relation suivante

$$L(h) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a).h \\ \vdots \\ \vdots \\ \nabla f_m(a).h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

La matrice à m lignes et n colonnes $(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$, $(i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n)$ s'appelle Matrice Jacobienne de la fonction f au point a et on l'a note $J_a(f)$.

Exemple
soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) == (f_1, f_2) = (x + e^z, \sin(xy)),$$

alors, on a

$$\begin{array}{lcl} f_1 & : & R^3 \to R;\ f_1(x, y, z) = x + e^z \\ f_2 & : & R^3 \to R;\ f_2(x, y, z) = \sin(xy), \end{array}$$

les dérivées partielles au point (x, y, z) sont

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & = & 1;\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 0;\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = e^z \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & = & y\cos(xy);\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = x\cos(xy);\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = 0. \end{array}$$

La matrice Jacobienne de la fonction f au point (x, y, z) est donnée par

$$J(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^z \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \end{pmatrix}$$

Si on prend le point $a = (0, 1, 1)$ et $h = (h_1, h_2, h_3)$,alors

$$L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 + eh_3 \\ h_1 \end{pmatrix}$$

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathbb{U} \sqsubseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et g une fonction définie sur un ouvert $\mathbb{V} \sqsubseteq \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, avec $f(\mathbb{U}) \sqsubseteq \mathbb{V}$. Supposons que f différentiable au point $a \in \mathbb{U}$ et que g est différentiable au point $f(a) \in \mathbb{V}$. Alors la fonction $g \circ f$ est différentiable au point $a \in \mathbb{U}$ et on a

$$L(g \circ f) = L(g).L(f)$$

Démonstration

La preuve est laissée au lecteur

Application

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, différentiable au point $t_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$t \mapsto f(t) = (f_1(t), ..., f_m(t))$$

et

$$L_f(h) = h \begin{pmatrix} f'(t_0) \\ \vdots \\ f'_m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hf'(t_0) \\ \vdots \\ hf'_m(t_0) \end{pmatrix}.$$

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable au point $f(t_0) \in \mathbb{R}^m$, alors

$$(x_1, ..., x_m) \mapsto g(x_1, ..., x_m)$$

et

$$L_g(k) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_0)), ..., \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t_0))) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}, \text{ où } k = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{R}^m.$$

D'où

$$\begin{aligned} L(g \circ f) &= L(g).L(f) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_0)), ..., \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t_0))) \begin{pmatrix} f'(t_0) \\ \vdots \\ f'_m(t_0) \end{pmatrix} \\ &= (\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_0))f'_1(t_0) + ... + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t_0))f'_m(t_0)). \end{aligned}$$

Généralement,

$$g'(f_1(t), ...f_m(t)) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_0))f_1'(t_0) + ... + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t_0))f_m'(t_0).$$

Exercices

Exercice1
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = (x+y, x-y),$$

et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(u,v) = \sin(u^2 - v^2).$$

Calculer les matrices suivantes
(1) La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (a,b).
(2) La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (c,d).
(3) La matrice Jacobienne $J(f \circ g)$ au point (x,y).

Exercice2
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y,z) = (x+y^2, xyz),$$

et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f(u,v) = (u^2+v, uv, \exp v).$$

Calculer les matrices suivantes
(1) La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (x,y,z).
(2) La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (u,v).
(3) La matrice Jacobienne $J(f \circ g)$ au point (x,y,z).

Exercice3
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x,y) = (\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x \cos y,$$

et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(u,v,w) = u^2 + v^2 + w.$$

Calculer les matrices suivantes
(1) La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (x,y).
(2) La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (u,v,w).
(3) La matrice Jacobienne $J(f \circ g)$ au point (x,y).

Solutions des exercices

Exercice1

La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (a,b) de la fonction $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ est donnée par

$$J(g)_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (c,d) de la fonction $f(u,v)$ est donnée par

$$\begin{aligned} J(f)_{(c,d)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u\cos(u^2-v^2) & -2v\cos(u^2-v^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2c\cos(c^2-d^2) & -2d\cos(c^2-d^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne composée $J(f\circ g)$ de la fonction $(f\circ g)(x,y) = \sin((x+y)^2-(x-y)^2) = \sin 4xy$ au point (x,y) est donnée par

$$J(f\circ g)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f\circ g)}{\partial x} & \frac{\partial(f\circ g)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y\cos(4xy) & 4x\cos(4xy) \end{pmatrix}.$$

Aussi cette matrice peut être calculée par la relation

$$\begin{aligned} J(f\circ g)_{(x,y)} &= J(f)_{g(x,y)}.J(g)_{(x,y)} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos(4xy) & -2(x-y)\cos(4xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4y\cos(4xy) & 4x\cos(4xy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice2

La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (x,y,z) de la fonction $g(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))$ est donnée par

$$J(g)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (u,v) de la fonction $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ est donnée par

$$J(f)_{(c,d)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne composée $J(f\circ g)$ de la fonction $(f\circ g)(x,y)$ au point (x,y) est donnée par

$$J(f\circ g)_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial(f\circ g)_1}{\partial x} & \frac{\partial(f\circ g)_1}{\partial y} & \frac{\partial(f\circ g)_1}{\partial z}\\ \frac{\partial(f\circ g)_2}{\partial x} & \frac{\partial(f\circ g)_2}{\partial y} & \frac{\partial(f\circ g)_2}{\partial z}\\ \frac{\partial(f\circ g)_3}{\partial x} & \frac{\partial(f\circ g)_3}{\partial y} & \frac{\partial(f\circ g)_3}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

Aussi cette matrice peut être calculée par la relation

$$\begin{aligned}J(f\circ g)_{(x,y)} &= J(f)_{g(x,y)}.J(g)_{(x,y)}\\ &= \begin{pmatrix}2(x+y^2) & 1\\ xyz & x+y^2\\ 0 & e^{xyz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2y & 0\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2y^2+2x+xy & 4xy+4y^3+xz & xy\\ 2xyz+y^3z & 3xy^2z+x^2z & x^2y+xy^3\\ yz\exp(xyz) & xz\exp(xyz) & xy\exp(xyz)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice3

La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (x,y) de la fonction $g(x,y)=(g_1(x,y),g_2(x,y),g_3(x,y))$ est donnée par

$$J(g)_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin x & \cos y\\ -\cos x & -\sin y\\ 2\cos x\cos y & -2\sin x\sin y\end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (u,v,w) de la fonction $f(u,v,w)$ est donnée par

$$J(f)_{(c,d)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u & 2v & 1\end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne composée $J(f\circ g)$ de la fonction $(f\circ g)(x,y)$ au point (x,y) est donnée par

$$J(f\circ g)_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x} & \frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sin x\sin y & 2\cos x\cos y\end{pmatrix}.$$

Aussi cette matrice peut être calculée par la relation

$$\begin{aligned}J(f\circ g)_{(x,y)} &= J(f)_{g(x,y)}.J(g)_{(x,y)}\\ &= \begin{pmatrix}2(\cos x+\sin y) & 2(-\sin x+\cos y) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin x & \cos y\\ -\cos x & -\sin y\\ 2\cos x\cos y & -2\sin x\sin y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-2\sin x\sin y & 2\cos x\cos y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$