

§4. Différentiabilité des fonctions sur \mathbb{R}^n

Différentiabilité d'une fonction

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et soit f une application définie sur U à valeurs dans \mathbb{R}^m

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

On dit que f est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire notée L définie dans \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m

$$L : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ h \mapsto L(h), \end{array}$$

et une application notée ε définie dans \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m

$$\varepsilon : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ h \mapsto \varepsilon(h), \end{array}$$

telles que les conditions suivantes sont satisfaites

1. $f(a+h) - f(a) = L(h) + \|h\| \varepsilon(h)$
2. $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

L'application linéaire L est dite différentielle de f au point $a \in U$.

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^m , la fonction f est dite différentiable au point $a \in U$ si et seulement si les fonctions coordonnées f_1, f_2, \dots, f_m le sont en ce point et, on a

$$L(h) = (L_1(h), L_2(h), \dots, L_m(h))^T \quad \text{où } h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration

Voir les cours d'analyse

Remarque

Si la fonction f est différentiable au point a de U dans \mathbb{R}^m , alors

$$L_i(h) = \nabla f_i(a).h, \text{ avec } h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n,$$

d'où la relation suivante

$$L(h) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a).h \\ \vdots \\ \nabla f_m(a).h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

La matrice à m lignes et n colonnes $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$; $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$ s'appelle la matrice Jacobienne de la fonction f au point a et, on l'a note $J_a(f)$.

Exemple

soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (f_1, f_2) = (x + e^z, \sin(xy)),$$

alors, on a

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; f_1(x, y, z) = x + e^z \\ f_2 &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x, y, z) = \sin(xy), \end{aligned}$$

les dérivées partielles au point (x, y, z) sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) &= 1; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 0; \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = e^z \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) &= y \cos(xy); \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = x \cos(xy); \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne de la fonction f au point (x, y, z) est donnée par

$$J(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^z \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) & 0 \end{pmatrix}$$

Si on prend le point $a = (0, 1, 1)$ et $h = (h_1, h_2, h_3)$, alors

$$L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 + eh_3 \\ h_1 \end{pmatrix}$$

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^m , et g une fonction définie sur un ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^m$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , avec $f(U) \subseteq V$. Supposons que f différentiable au point $a \in U$ et que g est différentiable au point $f(a) \in V$. Alors la fonction $g \circ f$ est différentiable au point $a \in U$ et on a

$$L(g \circ f) = L(g).L(f)$$

Démonstration

La preuve est laissée au lecteur

Application

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^m , différentiable au point $t_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$t \mapsto f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$$

et

$$L_f(h) = h \begin{pmatrix} f'(t_0) \\ \vdots \\ f'_m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hf'(t_0) \\ \vdots \\ hf'_m(t_0) \end{pmatrix}.$$

Soit g une fonction définie sur \mathbb{R}^m à valeurs dans \mathbb{R} , différentiable au point $f(t_0) \in \mathbb{R}^m$, alors

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto g(x_1, \dots, x_m)$$

et

$$L_g(k) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_0)) \quad \dots \quad \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t_0)) \right) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}, \text{ où } k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m.$$

D'où

$$\begin{aligned} L(g \circ f) &= L(g).L(f) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_0)) \quad \cdots \quad \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t_0)) \right) \begin{pmatrix} f'(t_0) \\ \vdots \\ f'_m(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_0))f'_1(t_0) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t_0))f'_m(t_0) \right). \end{aligned}$$

Généralement,

$$g'(f_1(t), \dots, f_m(t)) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t_0))f'_1(t_0) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t_0))f'_m(t_0).$$

Exercices

Exercice1

Soit g une fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 par

$$g(x, y) = (x + y, x - y),$$

et f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(u, v) = \sin(u^2 - v^2).$$

Calculer les matrices suivantes

1. La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (a, b) .
2. La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (c, d) .
3. La matrice Jacobienne $J(f \circ g)$ au point (x, y) .

Exercice2

Soit g une fonction définie sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^2 par

$$g(x, y, z) = (x + y^2, xyz),$$

et f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^3 par

$$f(u, v) = (u^2 + v, uv, \exp v).$$

Calculer les matrices suivantes

1. La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (x, y, z) .
2. La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (u, v) .
3. La matrice Jacobienne $J(f \circ g)$ au point (x, y, z) .

Exercice3

Soit g une fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^3 par

$$g(x, y) = (\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2 \sin x \cos y,$$

et f une fonction définie sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w.$$

Calculer les matrices suivantes

1. La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (x, y) .
2. La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (u, v, w) .
3. La matrice Jacobienne $J(f \circ g)$ au point (x, y) .

Solutions des exercices

Exercice1

La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (a, b) de la fonction $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ est donnée par

$$J(g)_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (c, d) de la fonction $f(u, v)$ est donnée par

$$\begin{aligned} J(f)_{(c,d)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \cos(u^2 - v^2) & -2v \cos(u^2 - v^2) \\ 2c \cos(c^2 - d^2) & -2d \cos(c^2 - d^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2c \cos(c^2 - d^2) & -2d \cos(c^2 - d^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne composée $J(f \circ g)$ de la fonction $(f \circ g)(x, y) = \sin((x+y)^2 - (x-y)^2) = \sin 4xy$ au point (x, y) est donnée par

$$J(f \circ g)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x} & \frac{\partial (f \circ g)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \cos(4xy) & 4x \cos(4xy) \end{pmatrix}.$$

Aussi cette matrice peut être calculée par la relation

$$\begin{aligned} J(f \circ g)_{(x,y)} &= J(f)_{g(x,y)} \cdot J(g)_{(x,y)} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+y) \cos(4xy) & -2(x-y) \cos(4xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4y \cos(4xy) & 4x \cos(4xy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice2

La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (x, y, z) de la fonction $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z))$ est donnée par

$$J(g)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (u, v) de la fonction $f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ est donnée par

$$J(f)_{(c,d)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne composée $J(f \circ g)$ de la fonction $(f \circ g)(x, y)$ au point (x, y) est donnée par

$$J(f \circ g)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f \circ g)_1}{\partial x} & \frac{\partial(f \circ g)_1}{\partial y} & \frac{\partial(f \circ g)_1}{\partial z} \\ \frac{\partial(f \circ g)_2}{\partial x} & \frac{\partial(f \circ g)_2}{\partial y} & \frac{\partial(f \circ g)_2}{\partial z} \\ \frac{\partial(f \circ g)_3}{\partial x} & \frac{\partial(f \circ g)_3}{\partial y} & \frac{\partial(f \circ g)_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Aussi cette matrice peut être calculée par la relation

$$\begin{aligned} J(f \circ g)_{(x,y)} &= J(f)_{g(x,y)} \cdot J(g)_{(x,y)} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+y^2) & 1 \\ xyz & x+y^2 \\ 0 & e^{xyz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y^2 + 2x + xy & 4xy + 4y^3 + xz & xy \\ 2xyz + y^3z & 3xy^2z + x^2z & x^2y + xy^3 \\ yz \exp(xyz) & xz \exp(xyz) & xy \exp(xyz) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3

La matrice Jacobienne $J(g)$ au point (x, y) de la fonction $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y))$ est donnée par

$$J(g)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y \\ -\cos x & -\sin y \\ 2 \cos x \cos y & -2 \sin x \sin y \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne $J(f)$ au point (u, v, w) de la fonction $f(u, v, w)$ est donnée par

$$J(f)_{(c,d)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial f}{\partial v} \quad \frac{\partial f}{\partial w} \right) = (2u \quad 2v \quad 1)$$

La matrice Jacobienne composée $J(f \circ g)$ de la fonction $(f \circ g)(x, y)$ au point (x, y) est donnée par

$$J(f \circ g)_{(x,y)} = \left(\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x} \quad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y} \right) = (-2 \sin x \sin y \quad 2 \cos x \cos y).$$

Aussi cette matrice peut être calculée par la relation

$$\begin{aligned} J(f \circ g)_{(x,y)} &= J(f)_{g(x,y)} \cdot J(g)_{(x,y)} \\ &= \begin{pmatrix} 2(\cos x + \sin y) & 2(-\sin x + \cos y) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y \\ -\cos x & -\sin y \\ 2 \cos x \cos y & -2 \sin x \sin y \end{pmatrix} \\ &= (-2 \sin x \sin y \quad 2 \cos x \cos y). \end{aligned}$$

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA

E-mail. mostefanadir@yahoo.fr

Mostefa NADIR