Théorème d'existence et d'unicité
(Méthode de contraction)

Le principe des applications contractantes est utilisé pour la démonstration de nombreux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles, fonctionnelles et intégrales.

Théorème (dit théorème **d'existence et d'unicité**)
Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

où $f(t, x)$ est une fonction continue de deux variables (t, x) sur l'ensemble

$$\mathbb{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mid t - t_0 \mid \leq a, \quad \mid x - x_0 \mid \leq b\} \subset \mathbb{U},$$

et satisfait à la condition de Lipschitz en x

$$\mid f(t, x_2) - f(t, x_1) \mid \leq L \mid x_2 - x_1 \mid \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{D}.$$

Alors, il existe une solution et une seule $x = \varphi(t)$ de l'équation (1) définie sur l'intervalle $\mathbb{T} =]t_0 - d, t_0 + d[$, avec $d \leq a$ et satisfait à la condition

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

Application contractante
Soit $\mathbb{E} = (X, \rho)$ un espace métrique, une application A définie sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ est dite contractante s'il existe un nombre positif $K \in]0, 1[$ tel que, pour tout point $x, y \in \mathbb{E}$, on a

$$\rho(Ax, Ay) \leq K\rho(x, y), \tag{3}$$

c'est à dire

$$\parallel Ay - Ax \parallel \leq K \parallel y - x \parallel .$$

Proposition
Toute application contractante est continue.

Démonstration

En effet, en vertu de la relation (3) , on a

$$x_n \to x \text{ implique } Ax_n \to Ax, \quad (n \to \infty)$$

Point fixe

Un point $x \in \mathbb{E}$ est appelé point fixe de l'application A si, on a

$$Ax = x,$$

en d'autre terme, les points fixes sont les points solutions de l'équation

$$Ax = x.$$

Théorème

Dans un espace métrique complet $\mathbb{E}$ toute application contractante A admet un point fixe et un seul.

Démonstration

Existence

Soit $x_0$un point de $\mathbb{E}$ et soit $\{x_n\}$ la suite définie par

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1 = A^2x_0, ..., x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0, ...$$

alors cette suite est de Cauchy car pour $m \geq n$, on a

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n x_0, A^n x_{m-n}) \leq K^n \rho(x_0, x_{m-n}) \\
&\leq K^n[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + ... + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \\
&\leq K^n \rho(x_0 x_1)[1 + K + K^2 + ... + K^{m-n-1}] \\
&\leq K^n \rho(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} K^i = K^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-K}.
\end{aligned}$$

Comme $0 < K < 1$, cette valeur peut être rendue aussi petit que l'on veut lorsque n augmente indéfiniment, l'espace $\mathbb{E}$ étant complet alors la suite de Cauchy $\{x_n\}$ converge, soit

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

L'application contractante A est continue, alors

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

D'où l'existence d'un point fixe pour l'application contractante A.

Unicité
Soient x et y deux points fixes alors, on a

$$Ax = x \quad \text{et} \quad Ay = y$$

en vertu de la relation (3)

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq K\rho(x, y),$$

d'où

$$0 \leq (1-k)\rho(x, y) \leq 0 \Rightarrow (1-K)\rho(x, y) = 0.$$

Comme $(1-K) \neq 0$, alors $\rho(x, y) = 0$ d'où le résultat voulu $x = y$. C.Q.F.D.

Démonstration (Théorème **d'existence et d'unicité**)
Comme il est connu la relation

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)),$$

avec la condition initiale

$$\varphi(t_0) = x_0,$$

est équivalente à l'équation intégrale

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \tag{4}$$

Soit A une application définie comme suit, pour toute fonction φ il existe une fonction φ^* telle que

$$\varphi^*(t) = (A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \tag{5}$$

ou symboliquement,

$$\varphi^* = A\varphi,$$

la solution de l'équation symbolique (4)

$$\varphi = A\varphi \tag{6}$$

est un point fixe de l'opérateur A.

Soit $\mathbb{G}$ le domaine donné par

$$\mathbb{G} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mid t - \ t_0 \mid \leq r, \ \ \mid x - x_0 \mid \leq b\} \subset \mathbb{D},$$

avec

$$r \leq a. \tag{7}$$

Désignons par Ω la famille de toutes les fonctions continues sur le segment $[t_0 - r, t_0 + r]$, dont le les graphes passent par $\mathbb{G}$, d'où la fonction $\varphi(t)$ appartient à la famille Ω si et seulement si $\forall t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, on a

$$\mid \varphi(t) - x_0 \mid \leq b. \tag{8}$$

Le problème est de trouver le nombre r tel que les deux conditions

- $\varphi \in \mathbb{G} \Rightarrow A\varphi \in \mathbb{G}$
- $\exists K \in]0,1[, \quad \| A\varphi - A\psi \| \leq K \| \varphi - \psi \|, \ \forall \varphi, \psi \in \mathbb{G}$

soient vérifiées.

Pour la première condition, montrons que pour tout $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, on a

$$\mid (A\varphi)(t) - x_0 \mid \leq b. \tag{9}$$

En effet,

$$\mid (A\varphi)(t) - x_0 \mid \leq \int_{t_0}^{t} \mid f(\tau, \varphi(\tau)) \mid d\tau \leq Mr, \quad \mid f(\tau, \varphi(\tau)) \mid \leq M,$$

d'où la première condition est remplie pour

$$r \leq \frac{b}{M}. \tag{10}$$

Pour la deuxième condition, on a

$$\begin{aligned}
| \quad & (A\varphi)(t) - (A\psi)(t) \mid \leq \int_{t_0}^{t} \mid f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau)) \mid d\tau \\
\leq \quad & L \int_{t_0}^{t} \mid \varphi(\tau) - \psi(\tau) \mid d\tau \leq L \parallel \varphi - \psi \parallel \mid t - t_0 \mid \leq Lr \parallel \varphi - \psi \parallel,
\end{aligned}$$

d'où

$$\max_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \mid (A\varphi)(t) - (A\psi)(t) \mid \leq Lr \parallel \varphi - \psi \parallel$$

autrement dit

$$\parallel A\varphi - A\psi \parallel \leq Lr \parallel \varphi - \psi \parallel .$$

ainsi la deuxième condition est vérifie si

$$r \leq \frac{K}{L}, \tag{11}$$

avec $K \in]0,1[$ et L la constante de Lipschitz. D'où les conditions aux dessus sont remplies pour la famille Ω, avec le nombre r vérifiant les inégalités $(7), (10)$ et (11).

Posons

$$\rho(\varphi, \psi) = \parallel \varphi - \psi \parallel, \quad \forall \varphi, \psi \in \Omega.$$

L'espace métrique $\mathbb{F} = (\Omega, \rho)$ est complet comme sous espace fermé de l'espace complet de toutes les fonctions continues sur $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Comme $K \in]0,1[$ et $A\varphi \in F$, $\forall \varphi \in \mathbb{F}$, l'application

$$A : \varphi \mapsto A\varphi \quad \text{est contractante.}$$

En vertu du principe des applications contractantes l'équation $A\varphi = \varphi$ admet une solution et une seule dans l'espace $\mathbb{F}$ avec la condition

$$d = \min(a, \frac{b}{M}, \frac{K}{L}).$$

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.