§3. Théorème d'existence et d'unicité du problème de Cauchy

Méthode de contraction

Le principe des applications contractantes est utilisé pour la démonstration de nombreux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles, des solutions des équations fonctionnelles et des solutions des équations intégrales.

Théorème (existence et unicité)

Etant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

où $f(t,x)$ *est une fonction définie sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, *continue pour les deux variables* (t,x) *sur l'ensemble*

$$D = \{(t,x) \in U, \ \ |t - t_0| \leq a, \ \ |x - x_0| \leq b\} \subset U,$$

et satisfait à la condition de Lipschitz en x *sur* D

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leq L\,|x_2 - x_1|\,, \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D.$$

Alors, il existe une solution maximale unique $x = x(t)$ *de l'équation différentielle* (1) *définie sur l'intervalle ouvert* $T =]t_0 - d, t_0 + d[$, *avec* $d \leq a$ *et satisfait à la condition initiale*

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

Autrement dit, il existe une solution unique pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Remarque 1

Le théorème d'existence et d'unicité est aussi appelé théorème de Cauchy-Lipschitz

Application contractante

Soit $E = (X, \|\|)$ un espace métrique, une application A définie sur E à valeurs dans E est dite contractante s'il existe un nombre positif $K \in]0, 1[$ tel que, pour tout point $x, y \in E$, on a

$$\|Ay - Ax\| \leq K \|y - x\| . \tag{3}$$

Proposition

Toute application contractante est continue.

Démonstration

En effet, soit x_n une suite convergente vers x, alors en vertu de la relation (3) , on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{implique} \quad \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax.$$

D'où la continuité de la fonction A.

Point fixe

Un point $x \in E$ est appelé point fixe de l'application A si, on a

$$Ax = x,$$

en d'autre terme, les points fixes sont les points solutions de l'équation

$$Ax = x.$$

Théorème

Dans un espace métrique complet E toute application contractante A admet un point fixe unique.

Démonstration

1. *Existence de la solution*

Soit $x_0$un point de E et soit (x_n) la suite définie par

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0, \\ x_2 &= Ax_1 = A^2x_0, \\ &\vdots \\ x_n &= Ax_{n-1} = A^2x_{n-2} = ... = A^nx_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

alors la suite x_n est de Cauchy, car pour tout $m \geq n$, on a

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &= \|A^n x_0 - A^m x_0\| \\
&= \|A^n x_0 - A^n x_{m-n}\| \\
&\leq K^n \|x_0 - x_{m-n}\| \\
&\leq K^n \left[\|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + ... + \|x_{m-n-1} - x_{m-n}\|\right] \\
&\leq K^n \|x_0 - x_1\| \left[1 + K + K^2 + ... + K^{m-n-1}\right] \\
&\leq K^n \|x_0 - x_1\| \sum_{i=0}^{\infty} K^i = K^n \|x_0 - x_1\| \frac{1}{1-K}.
\end{aligned}$$

Comme $0 < K < 1$, cette valeur peut être rendue aussi petit que l'on veut lorsque n augmente indéfiniment, l'espace E étant complet alors la suite de Cauchy x_n est convergente, soit

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

L'application contractante A est continue, alors

$$\begin{aligned}
Ax &= A \lim_{n \to \infty} x_n \\
&= \lim_{n \to \infty} Ax_n \\
&= \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x.
\end{aligned}$$

D'où l'existence d'un point fixe pour l'application contractante A.

2. *Unicité de la solution*

Soient x et y deux points fixes pour la même application contractante A alors, on a

$$Ax = x \quad \text{et} \quad Ay = y,$$

en vertu de la relation (3)

$$\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq K \|x - y\|, \tag{4}$$

d'où de la relation (4), on obtient

$$0 \leq (1 - k) \|x - y\| \leq 0,$$

ou encore

$$(1-K)\,\|x-y\| = 0.$$

Comme $(1-K) \neq 0$, alors $\|x-y\| = 0$ ce qui donne le résultat voulu $x = y$.

Démonstration (Théorème d'existence et d'unicité)
soit l'équation différentielle (1)

$$\dot{x} = f(t, x(t)),$$

avec la condition initiale (2)

$$x(t_0) = x_0,$$

l'équation différentielle (1) est équivalente à l'équation intégrale suivante

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{5}$$

Soit A une application définie comme suit, pour toute fonction x il existe une fonction x^* telle que $Ax = x^*$ avec la relation

$$x^*(t) = Ax(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{6}$$

Notons que la solution de l'équation intégrale (5) est un point fixe de l'opérateur A.

$$Ax = x. \tag{7}$$

Soit G le domaine donné par

$$G = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |t - \ t_0| \leq r, \ \ |x - x_0| \leq b\} \subset D,$$

avec la condition

$$r \leq a. \tag{8}$$

Désignons par Ω la famille de toutes les fonctions continues sur le segment $[t_0 - r, t_0 + r]$, dont le les graphes passent par G, d'où la fonction $x(t)$ appartient à la famille Ω si et seulement si $\forall t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, on a

$$|x(t) - x_0| \leq b. \tag{9}$$

Le problème est de trouver le nombre r tel que les deux conditions suivantes

1. $x(t) \in G \Rightarrow Ax(t) \in G$
2. $\exists K \in]0,1[,\ \|Ax - Ay\| \leq K\|x - y\|,\ \forall x, y \in G$

soient vérifiées.

Pour la première condition, montrons que pour tout $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, on a

$$|Ax(t) - x_0| \leq b. \tag{10}$$

En effet, pour $|f(\tau, x(\tau))| \leq M$, on a

$$\begin{aligned} |Ax(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau))|\, d\tau \\ &\leq Mr, \end{aligned}$$

d'où la première condition est remplie pour

$$r \leq \frac{b}{M}. \tag{11}$$

Pour la deuxième condition, on a

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))|\, d\tau \\ &\leq L\int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \\ &\leq L\|x - y\|\,|t - t_0| \\ &\leq Lr\|x - y\|, \end{aligned}$$

ou encore

$$\max_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} |Ax(t) - Ay(t)| \leq Lr\|x - y\|.$$

Autrement dit, on a

$$\|Ax - Ay\| \leq Lr\|x - y\|.$$

Ainsi la deuxième condition est vérifie si

$$r \leq \frac{K}{L}, \tag{12}$$

avec $K \in]0,1[$ et L la constante de Lipschitz. D'où les conditions aux dessus sont remplies pour la famille Ω, avec le nombre r vérifiant les inégalités (8), (11) et (12).

L'espace métrique $F = (\Omega, \|\|)$ est complet comme sous espace fermé de l'espace complet de toutes les fonctions continues sur $[t_0 - r, t_0 + r]$. Comme $K \in]0,1[$ et $Ax \in F$, $\forall x \in F$, l'application A est contractante et en vertu du principe des applications contractantes l'équation $Ax = x$ admet une solution unique dans l'espace F avec la condition

$$d = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{K}{L}\right). \tag{13}$$

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr