

### §3. Equations aux différentielles totales et facteur Intégrant

#### Equations aux différentielles totales

On appelle équation aux différentielles totales toute équation de la forme

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0, \quad (1)$$

vérifiant les conditions suivantes

1. Les fonctions  $M(t, x)$  et  $N(t, x)$  sont continues
2. Les fonctions  $M(t, x)$  et  $N(t, x)$  sont dérivables et vérifient la relation suivante

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}. \quad (2)$$

Les dérivées partielles  $\frac{\partial M(t, x)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial N(t, x)}{\partial t}$  étant continues dans un certain domaine, cela implique que le premier membre de l'équation (1) est une différentielle totale d'une certaine fonction  $F(t, x)$ .

Pour résoudre l'équation différentielle (1), il faut trouver une fonction  $F(t, x)$  telle que sa différentielle totale

$$dF(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} dx, \quad (3)$$

soit égale au premier membre de l'équation (1). Alors la solution générale de l'équation différentielle (1) s'écrit aussitôt

$$F(t, x) = C, \quad (4)$$

où  $C \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire.

#### Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$2txdt + (t^2 - x^2) dx = 0. \quad (5)$$

#### Solution

Vérifions si l'équation différentielle (5) est une différentielle totale

$$M(t, x) = 2tx, \quad N(t, x) = t^2 - x^2,$$

ces deux fonctions sont continues, avec la relation

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = 2t \quad \text{et} \quad \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = 2t,$$

on remarque que le premier membre de l'équation différentielle (5) est une différentielle totale d'une certaine fonction  $F(t, x)$ .

Cherchons la fonction  $F(t, x)$  comme suit.

Mettons les conditions suivantes

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 2tx, \tag{6}$$

ou encore

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = t^2 - x^2. \tag{7}$$

Intégrons l'équation différentielle (6) par rapport à  $t$  en considérant la variable  $x$  comme constante, alors la constante d'intégration est une fonction inconnue de la variable  $x$ . Soit  $\varphi(x)$  cette fonction, alors

$$F(t, x) = \int 2tx dt + \varphi(x) = t^2x + \varphi(x). \tag{8}$$

Portons l'expression (8) de la fonction  $F(t, x)$  dans l'équation différentielle (7) afin de déterminer la fonction  $\varphi(x)$ , il vient

$$\frac{\partial}{\partial x} (t^2x + \varphi(x)) = t^2 - x^2,$$

ou encore

$$t^2 + \varphi'(x) = t^2 - x^2,$$

après simplification, on obtient

$$\varphi'(x) = -x^2,$$

ce qui donne après intégration la fonction  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{3}x^3 + C.$$

Finalement, on obtient la fonction cherchée  $F(t, x)$

$$F(t, x) = t^2x - \frac{1}{3}x^3 + C,$$

ou encore la solution générale de l'équation différentielle (5)

$$t^2x - \frac{1}{3}x^3 = C_1.$$

**Remarque 1**

Pour la résolution de l'équation différentielle (5), on peut aussi intégrer l'équation différentielle (7) par rapport à  $x$  en considérant la variable  $t$  comme constante, alors la constante d'intégration est une fonction inconnue de la variable  $t$ .

**Remarque 2**

Dans certaines équations différentielles, il est possible de mettre en évidence les différentielles totales en appliquant des formules connues, telles que

$$d(tx) = xdt + tdx, \quad d\left(\frac{t}{x}\right) = \frac{xdt - tdx}{x^2}, \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x}, \dots \text{etc}$$

**Exemple 2**

Résoudre l'équation différentielle (3)

$$2txdt + (t^2 - x^2) dx = 0.$$

**Solution**

Réécrivons l'équation différentielle (3) sous une forme décomposée

$$2txdt + t^2dx - x^2dx = 0. \tag{9}$$

D'où, il est évident de trouver les fonctions aux différentielles totales correspondantes

$$2txdt + t^2dx = d(t^2x) \quad \text{et} \quad x^2dx = d\left(\frac{1}{3}x^3\right). \tag{10}$$

Remplaçons les expressions (10) dans l'équation différentielle (9), on obtient

$$d(t^2x) - d\left(\frac{1}{3}x^3\right) = 0,$$

ou encore

$$d\left(t^2x - \frac{1}{3}x^3\right) = 0,$$

ce qui donne la solution générale de l'équation différentielle (3)

$$t^2x - \frac{1}{3}x^3 = C.$$

### Facteur intégrant

On appelle facteur intégrant toute fonction non nulle  $\mu(t, x) \neq 0$  telle que, si l'on multiplie le premier membre de l'équation différentielle (1) par la fonction  $\mu(t, x)$  l'équation différentielle (1) devient une équation aux différentielles totales.

### Remarque 3

Si les fonctions  $M(t, x)$  et  $N(t, x)$  possèdent des dérivées partielles continues ne s'annulent pas simultanément, alors le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  existe toujours. Cependant, il n'y a pas de méthode générale pour le déterminer.

### Remarque 4

Il existe plusieurs facteurs intégrants pour une seule équation différentielle. Autrement dit, le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  d'une équation différentielle n'est pas unique.

### Recherche du facteur intégrant

Soit  $\mu(t, x)$  un facteur intégrant de l'équation différentielle (1) alors, on a

$$\mu(t, x)M(t, x)dt + \mu(t, x)N(t, x)dx = 0, \quad (11)$$

avec la condition suivante

$$\frac{\partial(\mu(t, x)M(t, x))}{\partial x} = \frac{\partial(\mu(t, x)N(t, x))}{\partial t}.$$

D'où il vient

$$\mu \frac{\partial M}{\partial x} + M \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \mu}{\partial t},$$

ou encore

$$\mu \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial x}. \quad (12)$$

Notons que dans le cas général, il est plus difficile de déterminer la fonction  $\mu(t, x)$  dans (12) que d'intégrer l'équation différentielle (1). C'est seulement dans des cas particuliers que l'on arrive à déterminer la fonction  $\mu(t, x)$ .

Supposons que l'équation différentielle (1) admette le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  dépendant de la fonction  $\omega(t, x)$  de  $t$  et de  $x$  alors, on peut réécrire l'équation (12) sous la forme suivante

$$\mu \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

d'où il vient

$$\mu \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \left( N \frac{\partial \omega}{\partial t} - M \frac{\partial \omega}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Mettons l'expression (13) sous la forme d'une équation différentielle à variables séparables

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \mu \psi(\omega),$$

ou encore sous la forme d'une équation différentielle à variables séparées

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(\omega) d\omega,$$

dont la solution  $\mu(t, x)$  est donnée par

$$\mu(t, x) = C e^{\int \psi(\omega) d\omega}, \quad \text{on pose } C = 1.$$

Il est à remarquer que la relation (13) nous donne la forme explicite de la fonction  $\psi(\omega)$

$$\psi(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N \frac{\partial \omega}{\partial t} - M \frac{\partial \omega}{\partial x}}.$$

En particulier, si le facteur intégrant de l'équation différentielle (1) dépend uniquement de la variable  $t$ , c'est à dire  $\omega(t, x) = \psi(t)$  alors, on écrit

$$\psi(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N},$$

ce qui implique

$$\mu(t, x) = e^{\int \psi(t) dt}.$$

En outre, si le facteur intégrant de l'équation différentielle (1) dépend uniquement de la variable  $x$ , c'est à dire  $\omega(t, x) = \psi(x)$  alors, on écrit

$$\psi(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{-M},$$

ce qui implique

$$\mu(t, x) = e^{\int \psi(x) dx}.$$

### Remarque 5

Il est à noter qu'il existe d'autres méthodes pour trouver le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  de l'équation différentielle (1).

**Exemple 3**

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(1 - t^2x) dt + t^2(x - t) dx = 0. \quad (14)$$

**Solution**

Soient les fonctions  $M(t, x)$  et  $N(t, x)$  telles que

$$M(t, x) = 1 - t^2x \quad \text{et} \quad N(t, x) = t^2(x - t),$$

la dérivée de  $M(t, x)$  par rapport à  $x$  et la dérivée de  $N(t, x)$  par rapport à  $t$  nous donnent

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -t^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 2tx - 3t^2.$$

D'où, on a

$$\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (15)$$

Il en résulte que le premier membre de l'équation différentielle (14) n'est pas une différentielle totale. Cherchons le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  dépendant seulement de la variable  $t$ , alors

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \\ &= \frac{-t^2 - 2tx + 3t^2}{t^2(x - t)} \\ &= -\frac{2}{t} = \psi(t). \end{aligned}$$

D'où le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  est donné par

$$\begin{aligned} \mu(t, x) &= e^{\int \psi(t) dt} \\ &= e^{\int -\frac{2}{t} dt} \\ &= e^{\ln \frac{1}{t^2}} \\ &= \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

Après la multiplication de tous les termes de l'équation différentielle (14) par le facteur intégrant  $\mu(t, x) = \frac{1}{t^2}$ , on obtient une nouvelle équation aux différentielles totales

$$\left(\frac{1}{t^2} - x\right) dt + (x - t) dx = 0, \quad (16)$$

il est clair que l'on ait

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t} = -1.$$

La résolution de l'équation différentielle (16) nous donne la solution suivante

$$-\frac{1}{t} - tx + \frac{1}{2}x^2 = C.$$

Remarquons que la multiplication de l'équation différentielle (14) par le facteur intégrant  $\mu(t, x) = \frac{1}{t^2}$  nous fait perdre la solution  $t = 0$ , d'où la solution générale de l'équation différentielle (14)

$$-\frac{1}{t} - tx + \frac{1}{2}x^2 = C; \quad t = 0.$$

#### Exemple 4

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(x + tx^2)dt - tdx = 0. \quad (17)$$

#### Solution

Soient les fonctions  $M(t, x)$  et  $N(t, x)$  telles que

$$M(t, x) = x + tx^2 \quad \text{et} \quad N(t, x) = -t,$$

la dérivée de  $M(t, x)$  par rapport à  $x$  et la dérivée de  $N(t, x)$  par rapport à  $t$  nous donnent

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1 + 2tx \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -1.$$

D'où, on a

$$\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (18)$$

Il en résulte que premier membre de l'équation différentielle (17) n'est pas une différentielle totale. Cherchons le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  dépendant

seulement de la variable  $x$ , alors

$$\begin{aligned}\psi(\omega) &= \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{-M} \\ &= \frac{1 + 2tx + 1}{-(x + tx^2)} \\ &= -\frac{2}{x} = \psi(x).\end{aligned}$$

D'où le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  est donné par

$$\begin{aligned}\mu(t, x) &= e^{\int \psi(x) dx} \\ &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \\ &= e^{\ln \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Après la multiplication de tous les termes de l'équation différentielle (17) par le facteur intégrant  $\mu(t, x) = \frac{1}{x^2}$ , on obtient une nouvelle équation au différentielles totales

$$\left(\frac{1}{x} + t\right) dt - \frac{t}{x^2} dx = 0, \quad (19)$$

il est clair que l'on ait

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{x^2}$$

La résolution de l'équation différentielle (19) nous donne la solution suivante

$$\frac{t}{x} + \frac{t^2}{2} = C.$$

Remarquons que la multiplication de l'équation différentielle (17) par le facteur intégrant  $\mu(t, x) = \frac{1}{x^2}$  nous fait perdre la solution  $x = 0$ , d'où la solution générale de l'équation différentielle (17)

$$\frac{t}{x} + \frac{t^2}{2} = C; \quad x = 0.$$

### Exemple 5

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\left(\sqrt{t^2 - x} + 2t\right) dt - dx = 0. \quad (20)$$

### Solution

Soient les fonctions  $M(t, x)$  et  $N(t, x)$  telles que

$$M(t, x) = \sqrt{t^2 - x} + 2t \quad \text{et} \quad N(t, x) = -1,$$

la dérivée de  $M(t, x)$  par rapport à  $x$  et la dérivée de  $N(t, x)$  par rapport à  $t$  nous donnent

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{t^2 - x}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 0.$$

D'où, on a

$$\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Il en résulte que premier membre de l'équation différentielle (20) n'est pas une différentielle totale. Cherchons le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  dépendant de la fonction  $\omega(t, x) = t^2 - x$ , c'est à dire  $\mu = \mu(\omega)$ , alors

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N \frac{\partial \omega}{\partial t} - M \frac{\partial \omega}{\partial x}}, \\ &= \frac{-1}{-2t + (\sqrt{t^2 - x} + 2t)}, \\ &= \frac{1}{2(t^2 - x)}, \\ &= -\frac{1}{2\omega} = \psi(\omega). \end{aligned}$$

D'où le facteur intégrant  $\mu(t, x) = \mu(\omega)$  est donné par

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= e^{\int \psi(\omega) d\omega} \\ &= e^{-\int \frac{1}{2\omega} d\omega} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \ln \omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega}}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\mu(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - x}}.$$

Après la multiplication de tous les termes de l'équation différentielle (20) par le facteur intégrant  $\mu(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - x}}$ , on obtient une nouvelle équation au différentielles totales

$$\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{t^2 - x}}\right) dt - \frac{1}{\sqrt{t^2 - x}} dx = 0, \quad (21)$$

il est clair que l'on ait

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{(t^2 - x)^3}}.$$

La résolution de l'équation différentielle (21) nous donne la solution suivante

$$t + 2\sqrt{t^2 - x} = C.$$

Remarquons que la multiplication de l'équation différentielle (20) par le facteur intégrant  $\mu(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - x}}$  nous fait perdre la solution  $x = t^2$ , d'où la solution générale de l'équation différentielle (20)

$$t + 2\sqrt{t^2 - x} = C; \quad x = t^2.$$

### Méthode de décomposition

Supposons que l'on peut décomposer l'équation différentielle (1) sous la forme

$$[M_1(t, x)dt + N_1(t, x)dx] + [M_2(t, x)dt + N_2(t, x)dx] = 0, \quad (22)$$

avec  $\mu_1(t, x)$  le facteur intégrant de la première expression de l'équation différentielle (22)

$$M_1(t, x)dt + N_1(t, x)dx,$$

et  $\mu_2(t, x)$  le facteur intégrant de la deuxième expression de l'équation différentielle (22)

$$M_2(t, x)dt + N_2(t, x)dx,$$

de sorte que l'on ait les deux relations suivantes

$$\mu_1 (M_1(t, x)dt + N_1(t, x)dx) = dF_1(t, x),$$

et aussi

$$\mu_2(M_2(t, x)dt + N_2(t, x)dx) = dF_2(t, x).$$

L'équation différentielle (22) se réécrit donc sous la forme

$$\frac{dF_1}{\mu_1} + \frac{dF_2}{\mu_2} = 0. \quad (23)$$

Cherchons le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  de l'équation différentielle (23) tel que

$$\mu \frac{dF_1}{\mu_1} + \mu \frac{dF_2}{\mu_2} = 0,$$

cela revient à trouver des fonctions  $\varphi(F_1)$  et  $\psi(F_2)$ , telles que

$$\varphi(F_1)dF_1 + \psi(F_2)dF_2 = 0,$$

il est clair que les fonctions  $\varphi(F_1)$  et  $\psi(F_2)$  vérifient les conditions suivantes

$$\varphi(F_1) = \frac{\mu(t, x)}{\mu_1(t, x)} \quad \text{et} \quad \psi(F_2) = \frac{\mu(t, x)}{\mu_2(t, x)}.$$

D'où, on tire le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  de l'équation différentielle (22) défini comme suit

$$\mu(t, x) = \mu_1\varphi(F_1) = \mu_2\psi(F_2).$$

Finalement, il est aisé d'écrire la solution générale l'équation différentielle (22) sous la forme

$$\int \varphi(F_1)dF_1 + \int \psi(F_2)dF_2 = C.$$

### Exemple 6

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\left(\frac{x}{t} + 3t^2\right) dt + \left(1 + \frac{t^3}{x}\right) dx = 0. \quad (24)$$

### Solution

Décomposons l'équation différentielle (24) sous la forme

$$\left(\frac{x}{t}dt + dx\right) + \left(3t^2dt + \frac{t^3}{x}dx\right) = 0,$$

on remarque que la fonction  $\mu_1(t, x) = t$  est un facteur intégrant de la première expression de l'équation différentielle (24)

$$\frac{x}{t}dt + dx,$$

de sorte que l'on ait

$$t \left( \frac{x}{t}dt + dx \right) = xdt + tdx = d(xt),$$

ce qui donne la fonction cherchée  $F_1(t, x)$

$$F_1(t, x) = tx.$$

Aussi, on voit que la fonction  $\mu_2(t, x) = x$  est un facteur intégrant de la deuxième expression de l'équation différentielle (24)

$$3t^2dt + \frac{t^3}{x}dx,$$

de sorte que l'on ait

$$x \left( 3t^2dt + \frac{t^3}{x}dx \right) = 3xt^2dt + t^3dx = d(t^3x),$$

ce qui donne la fonction cherchée  $F_2(t, x)$

$$F_2(t, x) = t^3x.$$

Le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  de l'équation différentielle (24) doit vérifier la condition (23). D'où, on trouve

$$\mu(t, x) = t\varphi(tx) = x\psi(t^3x).$$

Donnons aux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  les formes suivantes

$$\varphi(F) = F^2 \text{ et } \psi(F) = F;$$

on obtient les égalités voulues

$$t(tx)^2 = x(xt^3) = t^3x^2,$$

qui ne peut être que le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  de l'équation différentielle (24)

$$\mu(t, x) = t^3x^2.$$

Après la multiplication de tous les termes de l'équation différentielle (24) par le facteur intégrant  $\mu(t, x)$ , on obtient une nouvelle équation au différentielles totales

$$\begin{aligned} t^3 x^2 \left( \frac{x}{t} + 3t^2 \right) dt + t^3 x^2 \left( 1 + \frac{t^3}{x} \right) dx &= 0, \\ (t^2 x^3 + 3t^5 x^2) dt + (t^3 x^2 + t^6 x) dx &= 0, \\ (t^2 x^3 dt + t^3 x^2 dx) + (3t^5 x^2 dt + t^6 x dx) &= 0, \\ d \left( \frac{t^3 x^3}{3} \right) + d \left( \frac{t^6 x^2}{2} \right) &= 0, \\ d \left( \frac{t^3 x^3}{3} + \frac{t^6 x^2}{2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

D'où la solution générale de l'équation différentielle (24)

$$\frac{t^3 x^3}{3} + \frac{t^6 x^2}{2} = C.$$

### Remarque 5

Si dans l'équation différentielle (1), on trouve une fonction  $\varphi(t, x)$  dont la différentielle est totale, alors l'équation différentielle (1) est parfois simplifiée lorsque, on passe des variables  $(t, x)$  aux variables  $(t, y)$  ou  $(x, y)$  avec  $y = \varphi(t, x)$ .

### Exemple 7

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$xdt - (t^3 x + t) dx = 0. \quad (25)$$

### Solution

Groupons les termes qui représentent une différentielle totale, alors

$$xdt - tdx = -t^2 d \left( \frac{x}{t} \right),$$

ou encore

$$-t^2 d \left( \frac{x}{t} \right) - t^3 x dx = 0,$$

la division de l'équation différentielle (25) par  $-t^2$  nous donne

$$d \left( \frac{x}{t} \right) + t x dx = 0.$$

Posons le changement de variables suivant

$$y = \varphi(t, x) = \frac{x}{t} \text{ aussi, on a } t = \frac{x}{y},$$

on obtient une équation différentielle à variables séparables

$$dy + \frac{x^2}{y} dx = 0,$$

ou encore une équation différentielle à variables séparées simple à résoudre.

$$y dy = -x^2 dx.$$

### Exemple 8

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(tx + x^4) dt + (t^2 - tx^3) dx = 0. \quad (26)$$

### Solution

Groupons les termes qui représentent les différentielles totales, alors

$$t(xdt + tdx) + x^3(xdt - tdx) = 0,$$

$$td(tx) + x^5 d\left(\frac{t}{x}\right) = 0,$$

$$d(tx) + \frac{x^5}{t} d\left(\frac{t}{x}\right) = 0.$$

Substituons les changements de variables suivants

$$y = tx \text{ et } z = \frac{t}{x}, \text{ aussi, on a } x^2 = \frac{y}{z},$$

on obtient alors une équation à variables séparables

$$dy + \frac{y^2}{z^3} dz = 0,$$

ou encore une équation à variables séparées simple à résoudre.

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dz}{z^3}.$$

### Remarque 6

Si l'équation différentielle (1) est homogène de degré  $n$ , alors elle admet la fonction

$$\mu(t, x) = \frac{1}{Mt + Nx},$$

comme facteur intégrant avec la condition  $Mt + Nx \neq 0$ .

### Exemple 9

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(t^3 + x^3) dt - tx^2 dx = 0. \quad (27)$$

### Solution

L'équation différentielle (27) est homogène de degré 3, avec la condition  $Mt + Nx \neq 0$

$$Mt + Nx = t(t^3 + x^3) + x(-tx^2) = t^4.$$

D'où le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  est donné par

$$\mu(t, x) = \frac{1}{Mt + Nx} = \frac{1}{t^4}.$$

### Remarque 7

Si l'équation différentielle (1) s'écrit sous la forme

$$x f_1(xt) dt + t f_2(xt) dx = 0,$$

alors elle admet la fonction

$$\mu(t, x) = \frac{1}{Mt - Nx},$$

comme facteur intégrant avec la condition  $Mt - Nx \neq 0$ .

### Exemple 10

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(x + x^2t) dt + (t - x^2t^3) dx = 0. \quad (28)$$

### Solution

L'équation différentielle (28) peut s'écrire sous la forme

$$x f_1(xt) dt + t f_2(xt) dx = 0,$$

c'est à dire

$$x(1 + xt) dt + t(1 - x^2t^2) dx = 0.$$

où  $f_1(xt) = 1 + xt$  et  $f_2(xt) = 1 - (xt)^2$  avec la condition  $Mt - Nx \neq 0$

$$Mt - Nx = t(x + x^2t) - x(t - x^2t^3) = x^3t^3 + x^2t^2.$$

D'où le facteur intégrant  $\mu(t, x)$  est donné par

$$\mu(t, x) = \frac{1}{Mt - Nx} = \frac{1}{x^3t^3 + x^2t^2}.$$

### §3. Exercices sur les équations aux différentielles totales et Facteur intégrant

Trouver les facteurs intégrants et résoudre les équations différentielles suivantes

1)  $4txdt + (2t^2 - 2x)dx = 0.$

2)  $(\frac{-x}{t^2} + \frac{x}{t})dt + (\frac{1}{t} + \ln t)dx = 0.$

3)  $e^{-x}dt - (2x + te^{-x})dx = 0.$

4)  $x^2(2t - t^2x)dt + t^2(2x - tx^2)dx = 0.$

5)  $(x + x^2 \cos t)dt + (t + 2x \sin t)dx = 0.$

6)  $(2 + x^2)dt + txdx = 0.$

7)  $(\frac{2x}{t} - 3)dt + dx = 0.$

8)  $(x + \ln t)dt - tdx = 0.$

9)  $(\frac{3}{xt} - 1)dt - \frac{1}{x^2}dx = 0.$

10)  $(-\frac{3 \sin x}{t} - t)dt + \cos x dx = 0.$

11)  $\frac{1}{t}dt + (4 + \frac{\ln t}{x})dx = 0.$

12)  $(1 + x \cos t)dt + (\frac{2t}{x} + 3 \sin t)dx = 0.$

13)  $xdt + (x^2 - t - 1)dx = 0.$

14)  $(2t^3 + 2x^2t + 2x)dt + (2x^3t^2 + 4x^2t + 2xt^2 + xt^4 + 2t)dx = 0.$

15)  $-xt^3dt + (x^4 + t^4)dx = 0.$

16)  $(x^2t + x)dt + tdx = 0.$

17)  $(2x - 2x^3t^2)dt + (x^2t^3 + 2t)dx = 0.$

18)  $(x + 2tx^2 - x^4t^3)dt + (2xt^2 + t)dx = 0.$

19)  $(x + x^2t + t^3)dt + (x^3 + xt^2 - t)dx = 0.$

20)  $(x^2 - tx - t^2)dt + t^2dx = 0.$

Mostefa NADIR

### §3. Réponses des équations aux différentielles totales et Facteur intégrant

- 1)  $2t^2x - x^2 = C.$
- 2)  $\frac{x}{t} + x \ln t = C$
- 3)  $te^{-x} - x^2 = C.$
- 4)  $t^2x^2 - \frac{1}{3}t^3x^3 = C.$
- 5)  $xt + x^2 \sin t = C.$
- 6)  $2t^2 + t^2x^2 = C; \quad \mu(t, x) = t.$
- 7)  $xt^2 - t^3 = C; \quad \mu(t, x) = t^2.$
- 8)  $x + \ln t + 1 = Ct; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{t^2}.$
- 9)  $\frac{t^3}{x} - \frac{t^4}{4} = C; \quad \mu(t, x) = t^3.$
- 10)  $\sin x + t^2 = Ct^3; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{t^3}.$
- 11)  $2x^2 + x \ln t = C; \quad \mu(t, x) = x.$
- 12)  $x^2t + x^3 \sin t = C; \quad \mu(t, x) = x^2.$
- 13)  $x^2 + t + 1 = Cx; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{x^2}.$
- 14)  $(2x^2t^2 + 4xt + t^4)e^{x^2} = C; \quad \mu(t, x) = e^{x^2}.$
- 15)  $4x^4 \ln x - t^4 = Cx^4; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{x^5}.$
- 16)  $\ln |t| - \frac{1}{tx} = C; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{x^2t^2}.$
- 17)  $x = Ct^2e^{\frac{1}{x^2t^2}}; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{x^3t^3}.$

$$18) \quad -\ln |t| - \frac{1}{x^2 t^2} - \frac{1}{3t^3 x^3} = C; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{x^4 t^4}.$$

$$19) \quad x^2 + t^2 + 2 \arctan \frac{t}{x} = C; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{x^2 + t^2}.$$

$$20) \quad \frac{(x-t)t^2}{x+t} = C; \quad \mu(t, x) = \frac{1}{tx^2 - t^3}.$$

Mostefa NADIR

## Bibliographie

- [1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952
- [2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.
- [3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.
- [4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.
- [5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.
- [6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

**Address.** Prof. Dr. Mostefa NADIR  
Department of Mathematics  
Faculty of Mathematics and Informatics  
University of Msila  
28000 ALGERIA

**E-mail.** mostefanadir@yahoo.fr