§3. Equations aux différentielles totales et facteur Intégrant

Equations aux différentielles totales

On appelle équation aux différentielles totales toute équation de la forme

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0, \tag{1}$$

vérifiant les conditions suivantes

- Les fonctions $M(t,x)$ et $N(t,x)$ sont continues
- Les fonctions $M(t,x)$ et $N(t,x)$ sont dérivables et vérifient la relation suivante

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}. \tag{2}$$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial N(t,x)}{\partial t}$ étant continues dans un certain domaine, cela implique que le premier membre de l'équation (1) est une différentielle totale d'une certaine fonction $F(t,x)$.

Pour résoudre l'équation différentielle (1), il faut trouver une fonction $F(t,x)$ telle que sa différentielle totale

$$dF(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t}dt + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}dx,$$

soit égale au premier membre de l'équation (1). Alors la solution générale de l'équation différentielle (1) s'écrit aussitôt

$$F(t,x) = C,$$

où C est une constante arbitraire.

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$2txdt + (t^2 - x^2)dx = 0. \tag{3}$$

Solution

Vérifions si l'équation (3) est une différentielle totale

$$M(t,x) = 2tx, \quad N(t,x) = t^2 - x^2,$$

ces deux fonctions sont continues, avec la relation

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} = 2t \quad \text{et} \quad \frac{\partial N(t,x)}{\partial t} = 2t,$$

on remarque que le premier membre de l'équation (3) est une différentielle totale d'une certaine fonction $F(t,x)$.

Cherchons cette fonction $F(t,x)$ comme suit.

Mettons les conditions suivantes

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = 2tx \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = t^2 - x^2. \tag{4}$$

Intégrons la première fonction dans (4) par rapport à t en considérant la variable x comme constante, alors la constante d'intégration est une fonction inconnue de la variable x. Soit $\varphi(x)$ cette fonction, alors

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int 2tx\,dt + \varphi(x) \\ &= t^2 x + \varphi(x). \end{aligned}$$

Portons cette expression de la fonction $F(t,x)$ dans la deuxième fonction dans (4) afin de déterminer la fonction $\varphi(x)$, on aura

$$\frac{\partial}{\partial x}[t^2 x + \varphi(x)] = t^2 - x^2,$$

ou encore

$$t^2 + \varphi'(x) = t^2 - x^2,$$

après simplification, on obtient

$$\varphi'(x) = -x^2,$$

ce qui donne après intégration la fonction $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{3}x^3 + C.$$

Finalement, on obtient la fonction cherchée $F(t,x)$

$$F(t,x) = t^2x - \frac{1}{3}x^3 + C,$$

ce qui donne la solution générale de l'équation (3)

$$t^2x - \frac{1}{3}x^3 = C_1.$$

Remarque 1

Dans certaines équations, il est possible de mettre en évidence les différentielles totales en appliquant des formules connues, telles que

$$d(tx) = xdt + tdx, \quad d(\frac{t}{x}) = \frac{xdt - tdx}{x^2}, \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x}, \text{....etc}$$

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$2txdt + (t^2 - x^2)dx = 0.$$

Solution

Réécrivons cette équation sous une forme décomposée

$$2txdt + t^2dx - x^2dx = 0. \tag{5}$$

D'où, il est évident de trouver les fonctions aux différentielles totales correspondantes

$$2txdt + t^2dx = d(t^2x) \quad \text{et} \quad x^2dx = d(\frac{1}{3}x^3).$$

Remplaçons ces fonctions dans l'équation différentielle (5), on obtient

$$d(t^2x) - d(\frac{1}{3}x^3) = 0,$$

ou encore

$$d(t^2x - \frac{1}{3}x^3) = 0,$$

ce qui donne la solution générale de l'équation différentielle

$$t^2x - \frac{1}{3}x^3 = C.$$

Facteur intégrant

On appelle facteur intégrant toute fonction non nulle $\mu(t,x) \neq 0$ telle que, si l'on multiplie le premier membre de l'équation (1) par cette fonction $\mu(t,x)$ cette dernière devient une équation aux différentielles totales.

Remarque 2

Lorsque les fonctions $M(t,x)$ et $N(t,x)$ possèdent des dérivées partielles continues et qui ne s'annulent pas simultanément, alors le facteur intégrant existe toujours. Cependant, il n'y a pas de méthode générale pour le déterminer.

Remarque 3

Il existe plusieurs facteurs intégrants pour une seule équation. Autrement dit, le facteur intégrant d'une équation différentielle n'est pas unique.

Recherche du facteur intégrant

Soit $\mu(t,x)$ un facteur intégrant de l'équation (1) alors, on a

$$\mu(t,x)M(t,x)dt + \mu(t,x)N(t,x)dx = 0, \tag{6}$$

avec la condition suivante

$$\frac{\partial[\mu(t,x)M(t,x)]}{\partial x} = \frac{\partial[\mu(t,x)N(t,x)]}{\partial t}.$$

D'où il vient

$$\mu\frac{\partial M}{\partial x} + M\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial N}{\partial t} + N\frac{\partial \mu}{\partial t},$$

ou encore

$$\mu(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}) = N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial x}. \tag{7}$$

Mais dans le cas général, il est plus difficile de déterminer la fonction $\mu(t,x)$ dans (7) que d'intégrer l'équation proposée (1). C'est seulement dans des cas particuliers que l'on arrive à déterminer la fonction $\mu(t,x)$.

Supposons que l'équation différentielle (1) admette le facteur intégrant $\mu(t,x)$ dépendant de la fonction $\omega(t,x)$ de t et de x alors, on peut réécrire l'équation (7) sous la forme suivante

$$\mu(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}) = N\frac{\partial \mu}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

D'où il vient

$$\mu(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}) = \frac{\partial \mu}{\partial \omega}[N\frac{\partial \omega}{\partial t} - M\frac{\partial \omega}{\partial x}]. \tag{8}$$

Mettons cette expression sous la forme d'une équation à variables séparables

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \mu\psi(\omega),$$

ou encore sous la forme d'une équation à variables séparées

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(\omega)d\omega,$$

dont la solution $\mu(t, x)$ est donnée par

$$\mu(t, x) = \exp(\int \psi(\omega)d\omega), \quad C = 1.$$

Il est à remarquer que la relation (8) nous donne la forme explicite de la fonction $\psi(\omega)$

$$\psi(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N\frac{\partial \omega}{\partial t} - M\frac{\partial \omega}{\partial x}}.$$

En particulier, si le facteur intégrant de l'équation (1) dépend uniquement de t c'est à dire $\omega(t, x) = \psi(t)$ alors, on écrit

$$\psi(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N},$$

ce qui implique

$$\mu(t, x) = \exp\ (\int \psi(t)dt).$$

En outre, si le facteur intégrant de l'équation (1) dépend uniquement de x c'est à dire $\omega(t, x) = \psi(x)$ alors, on écrit

$$\psi(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{-M},$$

ce qui implique
$$\mu(t,x) = \exp(\int \psi(x)dx).$$

Remarque 4

Il est à noter qu'il y a d'autres méthodes pour trouver le facteur intégrant d'une équation différentielle de la forme (1).

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante
$$(1 - t^2 x)dt + t^2(x - t)dx = 0. \tag{9}$$

Solution

Soient les fonctions $M(t,x)$ et $N(t,x)$ tirées de l'équation
$$M(t,x) = 1 - t^2 x \quad \text{et} \quad N(t,x) = t^2(x - t),$$
la dérivée de $M(t,x)$ par rapport à x et la dérivée de $N(t,x)$ par rapport à t donnent
$$\frac{\partial M}{\partial x} = -t^2 \ \text{ et } \ \frac{\partial N}{\partial t} = 2tx - 3t^2.$$

D'où, on a
$$\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Il en résulte que le premier membre de l'équation différentielle (9) n'est pas une différentielle totale. Cherchons le facteur intégrant $\mu(t,x)$ dépendant seulement de la variable t, alors
$$\psi(\omega) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{-t^2 - 2tx + 3t^2}{t^2(x - t)} = -\frac{2}{t} = \psi(t).$$

D'où le facteur intégrant $\mu(t,x)$ est donné par
$$\mu(t,x) = \exp \int \psi(t)dt = \exp[-\int \frac{2}{t}dt] = \frac{1}{t^2}.$$

Après la multiplication de tous les termes de l'équation (9) par le facteur intégrant $\mu(t,x) = \dfrac{1}{t^2}$, on obtient une nouvelle équation au différentielles totales
$$(\frac{1}{t^2} - x)dt + (x - t)dx = 0,$$

il est clair que l'on ait
$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}=-1.$$

La résolution de cette équation nous donne la solution comme suit
$$-\frac{1}{t}-tx+\frac{1}{2}x^2=C.$$

Remarquons que la multiplication de l'équation différentielle (9) par le facteur intégrant $\mu(t,x)=\frac{1}{t^2}$ nous fait perdre la solution $t=0$, d'où la solution générale donnée par
$$-\frac{1}{t}-tx+\frac{1}{2}x^2=C; \qquad t=0.$$

Exemple 4

Résoudre l'équation différentielle suivante
$$(x+tx^2)dt-tdx=0. \tag{10}$$

Solution

Soient les fonctions $M(t,x)$ et $N(t,x)$ tirées de l'équation
$$M(t,x)=x+tx^2 \quad \text{et} \quad N(t,x)=-t,$$
la dérivée de $M(t,x)$ par rapport à x et la dérivée de $N(t,x)$ par rapport à t donnent
$$\frac{\partial M}{\partial x}=1+2tx \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial t}=-1.$$

D'où, on a
$$\frac{\partial M}{\partial x}\neq\frac{\partial N}{\partial t}.$$

Il en résulte que premier membre de l'équation différentielle (10) n'est pas une différentielle totale. Cherchons le facteur intégrant $\mu(t,x)$ dépendant seulement de la variable x, alors
$$\psi(\omega)=\frac{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}}{-M}=\frac{1+2tx+1}{-(x+2tx^2)}=-\frac{2}{x}=\psi(x).$$

D'où le facteur intégrant $\mu(t,x)$ est donné par

$$\mu(t,x) = \exp\int \psi(x)dx = \exp[-\int \frac{2}{x}dx] = \frac{1}{x^2}.$$

Après la multiplication de tous les termes de l'équation proposée (10) par le facteur intégrant $\mu(t,x) = \dfrac{1}{x^2}$, on obtient une nouvelle équation au différentielles totales

$$(\frac{1}{x} + t)dt - \frac{t}{x^2}dx = 0,$$

il est clair que l'on ait

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{x^2}$$

La résolution de cette équation nous donne la solution comme suit

$$\frac{t}{x} + \frac{t^2}{2} = C.$$

Remarquons que la multiplication de l'équation différentielle (10) par le facteur intégrant $\mu(t,x) = \dfrac{1}{x^2}$ nous fait perdre la solution $t = 0$, d'où la solution générale donnée par

$$\frac{t}{x} + \frac{t^2}{2} = C; \qquad x = 0.$$

Exemple 5

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(\sqrt{t^2 - x} + 2t)dt - dx = 0. \tag{11}$$

Solution

Soient les fonctions $M(t,x)$ et $N(t,x)$ tirées de l'équation

$$M(t,x) = \sqrt{t^2 - x} + 2t \quad \text{ et } \quad N(t,x) = -1,$$

la dérivée de $M(t,x)$ par rapport à x et la dérivée de $N(t,x)$ par rapport à t donnent

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{t^2 - x}} \quad \text{ et } \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 0.$$

D'où, on a

$$\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Il en résulte que premier membre de l'équation différentielle (11) n'est pas une différentielle totale. Cherchons le facteur intégrant $\mu(t,x)$ dépendant de la fonction $\omega(t,x) = t^2 - x$, c'est à dire $\mu = \mu(\omega)$, alors

$$\begin{aligned}
\psi(\omega) &= \frac{\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial t} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial x}}, \\
&= \frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{t^2 - x}}}{-2t + (\sqrt{t^2 - x} + 2t)}, \\
&= -\frac{1}{2(t^2 - x)}, \\
&= -\frac{1}{2\omega} = \psi(\omega).
\end{aligned}$$

D'où le facteur intégrant $\mu(t,x) = \mu(\omega)$ est donné par

$$\begin{aligned}
\mu(\omega) &= \exp \int \psi(\omega) d\omega \\
&= \exp[-\int \frac{1}{2\omega} d\omega] \\
&= \exp[-\frac{1}{2} \ln \omega] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\omega}},
\end{aligned}$$

ou encore

$$\mu(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - x}}.$$

Après la multiplication de tous les termes de l'équation proposée (11) par le facteur intégrant $\mu(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - x}}$, on obtient une nouvelle équation au différentielles totales

$$(1 + \frac{2t}{\sqrt{t^2 - x}})dt - \frac{1}{\sqrt{t^2 - x}} dx = 0,$$

il est clair que l'on ait

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{(t^2 - x)^3}}$$

La résolution de cette équation nous donne la solution comme suit

$$t + 2\sqrt{t^2 - x} = C.$$

Remarquons que la multiplication de l'équation différentielle (11) par le facteur intégrant $\mu(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - x}}$ nous fait perdre la solution $x = t^2$, d'où la solution générale donnée par

$$t + 2\sqrt{t^2 - x} = C; \qquad x = t^2.$$

Méthode de décomposition

Supposons que l'on peut décomposer l'équation différentielle (1) sous la forme

$$[M_1(t,x)dt + N_1(t,x)dx] + [M_2(t,x)dt + N_2(t,x)dx] = 0, \tag{12}$$

avec $\mu_1(t,x)$ le facteur intégrant de la première expression de l'équation

$$M_1(t,x)dt + N_1(t,x)dx,$$

et $\mu_2(t,x)$ le facteur intégrant de la deuxième expression de l'équation

$$M_2(t,x)dt + N_2(t,x)dx,$$

de sorte que l'on ait les deux relations suivantes

$$\mu_1[M_1(t,x)dt + N_1(t,x)dx] = dF_1,$$

et

$$\mu_2[M_2(t,x)dt + N_2(t,x)dx] = dF_2.$$

L'équation différentielle (12) se réécrit donc sous la forme

$$\frac{dF_1}{\mu_1} + \frac{dF_2}{\mu_2} = 0.$$

Cherchons le facteur intégrant $\mu(t,x)$ de cette équation tel que

$$\mu\frac{dF_1}{\mu_1}+\mu\frac{dF_2}{\mu_2}=0,$$

cela revient à trouver des fonctions $\varphi(F_1)$ et $\psi(F_2)$, telles que

$$\varphi(F_1)dF_1+\psi(F_2)dF_2=0,$$

ces fonctions doivent vérifient les conditions suivantes

$$\varphi(F_1)=\frac{\mu(t,x)}{\mu_1(t,x)} \quad \text{et} \quad \psi(F_2)=\frac{\mu(t,x)}{\mu_2(t,x)}.$$

D'où, on tire le facteur intégrant $\mu(t,x)$ de l'équation différentielle (12) défini comme suit

$$\mu(t,x)=\mu_1\varphi(F_1)=\mu_2\psi(F_2). \tag{13}$$

Finalement, il est aisé d'écrire la solution générale sous la forme

$$\int\varphi(F_1)dF_1+\int\psi(F_2)dF_2=C.$$

Exemple 6

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(\frac{x}{t}+3t^2)dt+(1+\frac{t^3}{x})dx=0. \tag{14}$$

Solution

Décomposons l'équation différentielle (14) sous la forme

$$[\frac{x}{t}dt+dx]+[3t^2dt+\frac{t^3}{x}dx]=0, \tag{15}$$

on remarque que la fonction $\mu_1(t,x)=t$ est un facteur intégrant de la première expression de l'équation

$$\frac{x}{t}dt+dx,$$

de sorte que l'on ait

$$t[\frac{x}{t}dt+dx]=xdt+tdx=d(xt),$$

ce qui donne la fonction cherchée $F_1(t,x)$

$$F_1(t,x) = tx.$$

Aussi, on voit que la fonction $\mu_2(t,x) = x$ est un facteur intégrant de la deuxième expression de l'équation

$$3t^2dt + \frac{t^3}{x}dx,$$

de sorte que l'on ait

$$x[3t^2dt + \frac{t^3}{x}dx] = 3xt^2dt + t^3dx = d(t^3x),$$

ce qui donne la fonction cherchée $F_2(t,x)$

$$F_2(t,x) = t^3x.$$

Le facteur intégrant $\mu(t,x)$ de l'équation différentielle (14) doit vérifier la condition (13) . D'où, on trouve

$$\mu(t,x) = t\varphi(tx) = x\psi(t^3x),$$

si on donne aux fonctions φ et ψ les formes suivantes

$$\varphi(F) = F^2 \text{ et } \ \psi(F) = F;$$

on obtient les égalités voulues

$$t(tx)^2 = x(xt^3) = t^3x^2,$$

qui ne peut être que le facteur intégrant $\mu(t,x)$ de l'équation différentielle (14)

$$\mu(t,x) = t^3x^2.$$

Après la multiplication de tous les termes de l'équation proposée (14) par le facteur intégrant $\mu(t,x)$, on obtient une nouvelle équation au différentielles totales

$$
\begin{aligned}
&t^3x^2(\frac{x}{t}+3t^2)dt+t^3x^2(1+\frac{t^3}{x})dx=0,\\
&(t^2x^3+3t^5x^2)dt+(t^3x^2+t^6x)dx=0,\\
&(t^2x^3dt+t^3x^2dx)+(3t^5x^2dt+t^6xdx)=0,\\
&d(\frac{t^3x^3}{3})+d(\frac{t^6x^2}{2})=0,\\
&d(\frac{t^3x^3}{3}+\frac{t^6x^2}{2})=0.
\end{aligned}
$$

D'où la solution générale de l'équation différentielle

$$\frac{t^3x^3}{3}+\frac{t^6x}{2}=C.$$

Remarque 5

Si dans l'équation différentielle (1) l'on reconnaît la différentielle totale d'une certaine fonction $\varphi(t,x)$, alors l'équation est parfois simplifiée lorsque, on passe des variables (t,x) aux variables (t,y) ou (x,y) avec $y=\varphi(t,x)$.

Exemple 7

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$xdt-(t^3x+t)dx=0. \tag{16}$$

Solution

Groupons les termes qui représentent une différentielle totale, alors

$$xdt-tdx=-t^2d(\frac{x}{t}),$$

la division de l'équation (16) par $-t^2$ nous donne

$$d(\frac{x}{t})+txdx=0.$$

Posons le changement de variables suivant

$$y=\varphi(t,x)=\frac{x}{t},$$

on obtient une équation à variables séparables

$$dy + \frac{x^2}{y}dx = 0,$$

ou encore une équation à variables séparées simple à résoudre.

$$ydy = -x^2dx.$$

Exemple 8

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(tx + x^4)dt + (t^2 - tx^3)dx = 0.$$

Solution

Groupons les termes qui représentent les différentielles totales, alors

$$\begin{aligned} &t(xdt + tdx) + x^3(xdt - tdx) = 0, \\ &td(tx) + x^5d(\frac{t}{x}) = 0 \end{aligned}$$

Divisons l'équation par t et substituons les changements de variables suivants

$$y = tx \quad \text{et} \quad z = \frac{t}{x},$$

on obtient alors une équation à variables séparables

$$dy + \frac{y^2}{z^3}dz = 0,$$

ou encore une équation à variables séparées simple à résoudre.

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dz}{z^3}.$$

Remarque 6

Si l'équation différentielle (1) est homogène de degré n, alors cette équation admet la fonction

$$\mu(t, x) = \frac{1}{Mt + Nx},$$

comme facteur intégrant avec la condition $Mt + Nx \neq 0$.

Exemple 9

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(t^3 + x^3)dt - tx^2dx = 0. \tag{17}$$

Solution

L'equation différentielle (17) est homogène de degré 3, avec la condition $Mt + Nx \neq 0$

$$Mt + Nx = t(t^3 + x^3) + x(-tx^2) = t^4.$$

D'où le facteur intégrant $\mu(t, x)$ est donné par

$$\mu(t, x) = \frac{1}{Mt + Nx} = \frac{1}{t^4}.$$

Remarque 7

Si l'équation différentielle (1) s'écrit sous la forme

$$xf_1(xt)dt + tf_2(xt)dx = 0,$$

alors cette équation admet la fonction

$$\mu(t, x) = \frac{1}{Mt - Nx},$$

comme facteur intégrant avec la condition $Mt - Nx \neq 0$.

Exemple 10

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(x + x^2t)dt + (t - x^2t^3)dx = 0. \tag{18}$$

Solution

L'equation différentielle (18) peut s'écrire sous la forme $xf_1(xt)dt + tf_2(xt)dx = 0$, c'est à dire

$$x(1 + xt)dt + t(1 - x^2t^2)dx = 0.$$

avec $f_1(xt) = 1 + xt$ et $f_2(xt) = 1 - (xt)^2$ et la condition $Mt - Nx \neq 0$

$$Mt - Nx = t(x + x^2t) - x(t - x^2t^3) = x^3t^3 + x^2t^2.$$

D'où le facteur intégrant $\mu(t, x)$ est donné par

$$\mu(t, x) = \frac{1}{Mt - Nx} = \frac{1}{x^3t^3 + x^2t^2}.$$

§3. Exercices sur les équations aux différentielles totales et Facteur intégrant

Trouver les facteurs intégrants et résoudre les équations différentielles suivantes

1) $4txdt + (2t^2 - 2x)dx = 0.$

2) $(\frac{-x}{t^2} + \frac{x}{t})dt + (\frac{1}{t} + \ln t)dx = 0.$

3) $\exp(-x)dt - (2x + t\exp(-x))dx = 0.$

4) $x^2(2t - t^2x)dt + t^2(2x - tx^2)dx = 0.$

5) $(x + x^2\cos t)dt + (t + 2x\sin t)dx = 0.$

6) $(2 + x^2)dt + txdx = 0.$

7) $(\frac{2x}{t} - 3)dt + dx = 0.$

8) $(x + \ln t)dt - tdx = 0.$

9) $(\frac{3}{xt} - 1)dt - \frac{1}{x^2}dx = 0.$

10) $(-\frac{3\sin x}{t} - t)dt + \cos x dx = 0.$

11) $\frac{1}{t}dt + (4 + \frac{\ln t}{x})dx = 0.$

12) $(1 + x\cos t)dt + (\frac{2t}{x} + 3\sin t)dx = 0.$

13 $xdt + (x^2 - t - 1)dx = 0.$

14) $(2t^3 + 2x^2t + 2x)dt + (2x^3t^2 + 4x^2t + 2xt^2 + xt^4 + 2t)dx = 0.$

15) $-xt^3dt + (x^4 + t^4)dx = 0.$

16) $(x^2t + x)dt + tdx = 0.$

17) $(2x - 2x^3t^2)dt + (x^2t^3 + 2t)dx = 0.$

18) $(x + 2tx^2 - x^4t^3)dt + (2xt^2 + t)dx = 0.$

19) $(x + x^2t + t^3)dt + (x^3 + xt^2 - t)dx = 0.$

20 $(x^2 - tx - t^2)dt + t^2dx = 0.$

§3. Réponses des équations aux différentielles totales et Facteur intégrant

1) $2t^2x - x^2 = C.$

2) $\dfrac{x}{t} + x\ln t = C$

3) $t\exp(-x) - x^2 = C.$

4) $t^2x^2 - \dfrac{1}{3}t^3x^3 = C.$

5) $xt + x^2\sin t = C.$

6) $2t^2 + t^2x^2 = C; \quad \mu(t,x) = t.$

7) $xt^2 - t^3 = C; \quad \mu(t,x) = t^2.$

8) $x + \ln t + 1 = Ct; \quad \mu(t,x) = \dfrac{1}{t^2}.$

9) $\dfrac{t^3}{x} - \dfrac{t^4}{4} = C; \quad \mu(t,x) = t^3.$

10) $\sin x + t^2 = Ct^3; \quad \mu(t,x) = \dfrac{1}{t^3}.$

11) $2x^2 + x\ln t = C; \quad \mu(t,x) = x.$

12) $x^2t + x^3\sin t = C; \quad \mu(t,x) = x^2.$

13) $x^2 + t + 1 = Cx; \quad \mu(t,x) = \dfrac{1}{x^2}.$

14) $(2x^2t^2 + 4xt + t^4)\exp x^2 = C; \quad \mu(t,x) = \exp x^2.$

15) $4x^4\ln x - t^4 = Cx^4; \quad \mu(t,x) = \dfrac{1}{x^5}.$

16) $\ln \mid t \mid - \dfrac{1}{tx} = C; \quad \mu(t,x) = \dfrac{1}{x^2t^2}.$

17) $x = Ct^2 \exp(\frac{1}{x^2t^2})$; $\mu(t,x) = \frac{1}{x^3t^3}$.

18) $-\ln \mid t \mid - \frac{1}{x^2t^2} - \frac{1}{3t^3x^3} = C$; $\mu(t,x) = \frac{1}{x^4t^4}$.

19) $x^2 + t^2 + 2\arctan\frac{t}{x} = C$; $\mu(t,x) = \frac{1}{x^2+t^2}$.

20 $\frac{(x-t)t^2}{x+t} = C$; $\mu(t,x) = \frac{1}{tx^2 - t^3}$.

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.