Différentiabilité sur $\mathbb{R}$

Différentiabilité d'une fonction

Soit $\mathbb{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une application définie sur $\mathbb{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$f: \quad U \to \mathbb{R}$$

On dit que f est différentiable en un point $a \in \mathbb{U}$ s'il existe une application linéaire notée L définie dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L: \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & h \mapsto L(h), \end{aligned}$$

et une application notée ε définie dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varepsilon: \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & h \mapsto \varepsilon(h), \end{aligned}$$

telles que les conditions suivantes sont satisfaisantes

(1) $\quad f(a+h) - f(a) = L(h) + \parallel h \parallel \varepsilon(h)$.

(2) $\quad \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

L'application linéaire L est dite différentielle de f au point $a \in \mathbb{U}$.

Remarque

La différentielle L d'une application f est unique.

Dérivée suivant un vecteur

On appelle $f'(a;h)$ la dérivée au point $a \in \mathbb{U}$ suivant le vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ d'une fonction f définie sur un ouvert $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f'(a;h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}$$

Si h est un vecteur unitaire ($\parallel h \parallel = 1$), le nombre $f'(a;h)$ est dit dérivée de f en a dans la direction de h.

Dérivées partielles

On appelle dérivée partielle au point $a \in \mathbb{U}$ et, on écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, ..., a_n) = f'(a; e_k),$$

la dérivée suivant le vecteur $h = e_k = (0, 0, ..\underset{k}{1}, .., 0)$.

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathbb{U} \sqsubseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable en un point $a \in \mathbb{U}$. Alors la fonction f admet une dérivée $L(h)$ en a suivant n'importe quel vecteur $h \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration

La fonction f étant différentiable, alors

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \parallel h \parallel \varepsilon(h) \ \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Remplaçons le vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ par le vecteur th où $t \in \mathbb{R}$ et, on écrit

$$f(a+th) - f(a) = L(th) + \parallel th \parallel \varepsilon(th) \ \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(th) = 0,$$

ce qui implique

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = L(h) \pm \parallel h \parallel \varepsilon(th) \ \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(th) = 0,$$

d'où

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = L(h) = f'(a; h).$$

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathbb{U} \sqsubseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable en un point $a \in \mathbb{U}$. Alors la fonction f admet des dérivées partielles en ce point et, on a

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n \ \text{ où } h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration
La fonction f étant différentiable, alors

$$f(a+h)-f(a)=L(h)+\parallel h\parallel\varepsilon(h)\ \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

Désignons par $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\forall t\in\mathbb{R}, \text{on a } f(a+te_k)-f(a)=L(te_k)+\parallel te_k\parallel\varepsilon(te_k),$$

d'où

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_k)-f(a)}{t}=L(e_k)\pm\lim_{t\to 0}\varepsilon(te_k),$$

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)=L(e_k).$$

Enfin

$$\begin{aligned} L(h) &= L(h_1e_1+h_2e_2+...,+he_n)=h_1L(e_1)+h_2L(e_2)+...+L(e_n)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n. \end{aligned}$$

Exemple
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y)=2x+3y,\ \text{ alors pour } a=(a_1,a_2) \text{ et } h=(h_1,h_2),$$

on a

$$f(a+h)-f(a)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=2h_1+3h_2=f(h).$$

Remarque
En général si f est une application linéaire, alors elle est différentiable en tout point $a\in\mathbb{R}^n$ et, on a

$$L(h)=f(h),\ \forall h\in\mathbb{R}^n$$

Théorème 3

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{R}$, différentiables au point $a \in \mathbb{U}$. Alors les fonctions numériques $f+g$ et λf sont différentiables au point $a \in \mathbb{U}$ et leurs différentielles au point a sont données par

$$\begin{aligned} L(f+g) &= L(f) + l(g), \\ L(\lambda f) &= \lambda L(f) \end{aligned}$$

La démonstration est laissée au lecteur.

Théorème 4

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) =< a, x >, \ \forall a \in \mathbb{R}^n,$$

alors f est différentiable en a, de plus elle admet une dérivée $f'(a,h)$ suivant n'importe quel vecteur h,

$$L(h) = f(h) =< a, h >= f'(a,h)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} f'(a,h) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{< a, x+th > - < a, x >}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t < a, h >}{t} =< a, h > . \end{aligned}$$

Théorème 5

Soit $\mathbb{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit f une fonction définie sur $\mathbb{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables et que ces dérivées sont continues au point $a \in \mathbb{U}$, alors f est différentiable au point a.

Démonstration

Traitons le cas où $n = 3$, pour n un entier quelconque la démonstration se fait d'une façon analogue.

Soient $a=(a_1,a_2,a_3)$ et $h=(h_1,h_2,h_3)$, il faut trouver une application linéaire L définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, et une application ε de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(a+h)-f(a)=L(h)+\parallel h \parallel \varepsilon(h),\ \text{avec} \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(a+h)-f(a) &= f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)-f(a_1,a_2,a_3)\\
&= f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)-f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3)\ [1]\\
&\quad +f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3)-f(a_1+h_1,a_2,a_3)\ [2]\\
&\quad +f(a_1+h_1,a_2,a_3)-f(a_1,a_2,a_3)\ [3].
\end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis pour une fonction dérivable $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$,

$$g(x+h)-g(x)=hg'(x+\theta h),\ \text{avec}\ \ 0<\theta<1.$$

Appliquons le théorème aux (3) différences, on obtient

$$\begin{aligned}
[1] &= h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+\theta_3 h_3),\ 0<\theta_3<1.\\
[2] &= h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,a_2+\theta_2 h_2,a_3),\ 0<\theta_2<1.\\
[3] &= h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2,a_3),\ 0<\theta_1<1.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
f(a+h)-f(a) &= h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+\theta_3 h_3)\\
&\quad +h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,a_2+\theta_2 h_2,a_3)+h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2,a_3)
\end{aligned}$$

Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ étant continues au point a, alors,

$$\begin{aligned}
f(a+h)-f(a) &= h_1(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3)+\varepsilon_1(h))+h_2(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3)+\varepsilon_2(h))\\
&\quad h_3(\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)+\varepsilon_3(h)),\\
\text{avec}, \lim_{h\to 0}\varepsilon_i(h) &= 0,\ i=1,2,3.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)+ \\ &\| \quad h \| (\frac{h_1}{\| h \|}\varepsilon_1(h)+\frac{h_2}{\| h \|}\varepsilon_2(h)+\frac{h_3}{\| h \|}\varepsilon_3(h)). \end{aligned}$$

D'où la différentiabilité de f au point a.

Remarque

Si une fonction f est différentiable au point a alors elle est continue en ce point.

Fonctions de classe C^1

Soit f une fonction admet des dérivées partielles continues sur un ouvert $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'elle est continûment différentiable sur $\mathbb{U}$ aussi, on dit qu'elle est de classe C^1sur $\mathbb{U}$.

Gradient d'une fonction

Soit f une fonction définie et différentiable sur un ouvert $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$, le gradient de la fonction f au point $a \in \mathbb{U}$ que l'on note $\operatorname{grad} f(a)$ ou $\nabla f(a)$ est le vecteur donné par

$$\operatorname{grad} f(a)=\nabla f(a)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)).$$

On obtient ainsi une application notée $\operatorname{grad} f$ de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{R}^n$, comme suit

$$a \mapsto \operatorname{grad} f(a)=\nabla f.$$

Remarque

Si les dérivées partielles d'une fonction f existent et sont continues sur un ouvert $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$, alors f est différentiable sur $\mathbb{U}$, et on a

$$f'(a,h)=\nabla f.h, \quad a\in\mathbb{U},\ h\in\mathbb{R}^n.$$

Exercices

Exercice 1
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Démontrer que
(1) La fonction f admet des dérivées partielles pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Les dérivées partielles ne sont pas continues au point $(0,0)$.
(3) La fonction f est dérivable au point $(0,0)$.

Exercice 2
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Démontrer que
(1) La fonction f admet des dérivées partielles pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Les dérivées partielles ne sont pas continues au point $(0,0)$.
(3) La fonction f n'est pas dérivable au point $(0,0)$.

Exercice 3
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}.$$

Démontrer que
(1) La fonction f admet des dérivées partielles pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Les dérivées partielles ne sont pas continues au point $(1,0)$.
(3) La fonction f n'est pas dérivable au point $(1,0)$.

Exercice 4

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(2,3)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^3 - (y-3)^3}{(x-2)^2 + (y-3)^2} & \text{si } (x,y) \neq (2,3) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (2,3) \end{cases}.$$

Démontrer que

(1) La fonction f admet des dérivées partielles pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Les dérivées partielles ne sont pas continues au point $(2,3)$.

(3) La fonction f est-elle dérivable au point $(2,3)$?

Exercice 5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \frac{x^2 - (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Démontrer que

(1) La fonction f est différentiable en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$.

(2) Que peut-on dire de dérivabilité de La fonction f au point $(0,1)$ si on prend $f(0,1) = 0$?

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Calculer les dérivées suivantes

(1) La dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ de la fonction f au point $(0,0)$.

(2) La dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ de la fonction f au point $(0,0)$.

(3) Les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ de la fonction f sont-elles continues au point $(0,0)$.

Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

La fonction $f(x,y)$ admet des dérivées partielles pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles au point $(0,0)$ sont données par,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}} = 0.\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{\sqrt{y^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles ne sont pas continues car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Il est à remarquer que la fonction f est dérivable

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Solution de l'exercice 2

La fonction $f(x,y)$ admet des dérivées partielles pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Les dérivées partielles au point $(0,0)$ sont données par,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0.\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = 1.\end{aligned}$$

Les dérivées partielles ne sont pas continues car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Il est à remarquer que la fonction f n'est pas dérivable au point $(0,0)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$$

Solution de l'exercice 3

La fonction $f(x,y)$ admet des dérivées partielles pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(1,0)\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2(x-1)^2y^2+y^4}{((x-1)^2+y^2)^2}.\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y(x-1)^3}{((x-1)^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Les dérivées partielles au point $(0,0)$ sont données par,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{0-0}{x-1} = 0.\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(1,y)-f(1,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0.\end{aligned}$$

Les dérivées partielles ne sont pas continues car

$$\lim_{(x,y)\to(10)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \text{ et } \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$$

Il est à remarquer que la fonction f n'est pas dérivable au point $(1,0)$,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \neq 0$$

Solution de l'exercice 4

La fonction $f(x,y)$ admet des dérivées partielles pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(2,3)\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(x-2)^4 + 3(x-2)^2(y-3)^2 + 2(x-2)(y-3)^3}{((x-2)^2 + (y-3)^2)^2}. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-(y-3)^3 - 3(x-2)^3(y-3)^2 - 2(y-3)(x-2)^2}{((x-2)^2 + (y-3)^2)^2}. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles au point $(2,3)$ sont données par,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2,3) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x,3) - f(2,3)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x-2} = 1. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,3) &= \lim_{y\to 3} \frac{f(2,y) - f(2,3)}{y-3} = \lim_{y\to 3} \frac{-(y-3)}{y-3} = -1. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles ne sont pas continues car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Il est à remarquer que la fonction f n'est pas dérivable au point $(2,3)$,

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{f(x,y) - f(2,3) - \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}} \neq 0$$

Solution de l'exercice 5

La fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 1)\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{4x(y-1)^2}{(x^2+(y-1)^2)^2}. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-4(y-1)x^2}{(x^2+(y-3)^2)^2}. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont continues en tout point du domaine de définition, ce qui implique que la fonction f est différentiable avec

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

Si au point $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, on prend la valeur $f(0, 1) = 0$, la fonction ne serait pas dérivable car elle n'est pas continue en ce point.

Solution de l'exercice 6

Pour calculer les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ de la fonction f au point $(0, 0)$, il faut connaître les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{y}. \end{aligned}$$

Alors, on a dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-y^5 + x^4 y + 4x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^5 - y^4 x - 4y^2 x^3}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Aussi les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0.\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.\end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont continues car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Les dérivées secondes sont continues car elles sont égales.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = 0$$