Topologie de $\mathbb{R}^n$

Opérations sur $\mathbb{R}^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de $n-$uples,

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \text{où } x_1, x_2, ..., x_n \text{ sont des nombres réels.}$$

Si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + ..., x_n + y_n) \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n). \end{aligned}$$

Ces deux dernières opérations nous donnent une structure d'espace vectoriel pour $\mathbb{R}^n$ sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$.

Produit scalaire

Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de x et y, noté $< x, y >$ ou $x.y$ le nombre réel

$$< x, y >= x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

Norme

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, la norme de x que l'on note $\| x \|$est la racine carrée non négative suivante

$$\| x \| = < x, x >^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1

Soient x, y et z trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et soient a et b deux nombres réels alors,

(1)• $\| x \| \geq 0$

(2)• $\| x \| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

(3)• $\| ax \| = | a | \| x \|$

(4)• $< x, y >=< y, x >$

(5)• $< ax + by, z >= a < x, z > +b < y, z >$

(6)• $|< x, y >| \leq \parallel x \parallel \parallel y \parallel$ *(inégalité de Schwartz)*
(7)• $\parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel$
(8)• $\parallel x - z \parallel \leq \parallel x - y \parallel + \parallel y - z \parallel$

Démonstration
$(1), (2), (3), (4)$ et (5) résultent immédiatement des définitions.
(6)• Pour tout vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$< \lambda x + y, \lambda x + y >= \lambda^2 \parallel x \parallel^2 + 2\lambda < x, y > + \parallel y \parallel^2 \geq 0,$$

on prend les vecteurs x et y comme donnés et on traite cette expressions comme un trinôme de deuxième degré en λ, équation sous la forme

$$a\lambda^2 + b\lambda + c, \text{ avec } a = \parallel x \parallel^2, \ b = 2 < x, y >, \ c = \parallel y \parallel^2 .$$

Comme ce trinôme est toujours positif, alors son déterminant $b^2 - 4ac$ est négatif, d'où

$$4 < x, y >^2 \leq 4 \parallel x \parallel^2 \parallel y \parallel^2 .$$

En extrayant les racines carrées des deux membres, on obtient l'inégalité de Schwartz.
(7)• Pour tout vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \parallel & x + y \parallel = < x + y, x + y > = < x, y > + 2 < x, y > + < y, y > \\ \leq & \parallel x \parallel^2 + 2 \parallel x \parallel \parallel y \parallel + \parallel y \parallel^2 = (\parallel x \parallel + \parallel y \parallel)^2 \\ \Rightarrow & \parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel . \end{aligned}$$

(8)• Si dans (7), on remplace x par $x - y$ et y par $y - z$, on obtient (8).

Distance
Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit la distance entre ces deux vecteurs par,

$$d(x, y) = \parallel x - y \parallel, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 2
Pour tout vecteurs x, y et z de $\mathbb{R}^n$, on a
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité du triangle)*
- $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$

Démonstration

En effet il est aisé de remplacer dans la relation (3) le vecteur x par $x-y$ et le réel a par -1, on obtient

$$d(x,y)=d(y,x)$$

Aussi, de la relation (8), on obtient immédiatement,

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z) \quad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Enfin, de la relation (1), on a

$$d(x,y)=0 \text{ si et seulement si } x=y$$

Propriétés

La distance euclidienne $d(x,y)$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifie pour tout x,y et z de $\mathbb{R}^n$ les propriétés suivantes

(1) • $d(x,y)>0$ si $x\neq y$; et $d(x,x)=0$

(2) • $d(x,y)=d(y,x)$

(3) • $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

Boule Ouverte

On appelle boule ouverte de centre $a\in\mathbb{R}^n$ et de rayon $r>0$, et que l'on note $B(a,r)$ l'ensemble des points $x\in\mathbb{R}^n$ tels que $d(a,x)<r$ et on écrit

$$B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n,\ d(a,x)<r\}.$$

Ensemble ouvert

Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un sous ensemble U de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x\in U,\ \exists r>0,\ \text{tel que } B(x,r)\subset U.$$

Exemple

Pour tout point $a\in\mathbb{R}$, on a

$$B(a,r)=\{x\in\mathbb{R},\ d(a,x)=\mid a-x\mid<r\}=]a-r,a=r[.$$

Proposition

Toute boule ouverte $B(a,r)$ de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert

Démonstration

Soit x un point de la boule $B(a,r)$, il nous faut trouver un point $s>0$ tel que $B(x,s)\subset B(a,r)$, le fait que l'on a $d(a,x)<r$ alors $r-d(a,x)>0$, soit $s=r-d(a,x)$, on peut montrer maintenant que $B(x,s)\subset B(a,r)$.

Alors prenons

$$\begin{aligned} y &\in B(x,s) \Rightarrow d(x,y)<s \Rightarrow d(x,y)<r-d(a,x) \\ &\Rightarrow d(a,x)+d(x,y)<r \Rightarrow d(a,y)<r. \end{aligned}$$

D'où

$$y\in B(a,r).$$

Point d'accumulation

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, un point x de $\mathbb{R}^n$ est dit point d'accumulation de A si pour tout $r>0$, la boule ouverte $B(x,r)$ contient un point $y\neq x$ tel que $y\in A$.

Exemple

Soit l'ensemble $A=[0,1[$. le point 1 est un point d'accumulation de A car toute boule ouverte $B(1,r)$ contient un point $y\neq 1$ tel que $y\in A=[0,1[$.

Limite d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'un élément $p\in\mathbb{R}^n$ est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit

$$p=\lim_{n\to\infty} x_n,$$

si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\ \text{il existe un entier } N\in\mathbb{N},\ \forall\ n>N\ \Rightarrow d(x_n,p)<\varepsilon.$$

Exercices

Exercice 1
Soient x, y et z trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$, avec

$$x = (3, -1, 2, 0);\ y = (-1, 3, 5, \frac{1}{2});\ z = (\frac{1}{2}, 0, -1, -1)$$

calculer
(1)• $2y + z$
(2)• $\parallel x \parallel;\ \parallel y \parallel;\ \parallel x + y \parallel$
(3)• $< x + y, 2z >$
(4)• $|< x, z >|;\ \parallel x \parallel \parallel z \parallel$

Exercice 2
Démontrer la relation suivante

$$|\parallel x \parallel - \parallel y \parallel| \leq \parallel x - y \parallel$$

Exercice 3
Démontrer que pour tout nombres réels x_1, x_2, y_1et y_2, on a la relation

$$| x_1 y_1 + x_2 y_2 | \leq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 4
Soit A un ensemble fini de $\mathbb{R}^n$. Montrer que son complémentaire est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5
Montrer que
(1)• La réunion d'une famille de sous ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous ensemble ouvert.
(2)• L'intersection finie d'une famille de sous ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous ensemble fermé

Exercice 6
Montrer que si a est un point d'accumulation d'un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, alors il est limite d'une suite d'éléments de $A - \{a\}$.