§2. Théorème d'existence et d'unicité du problème de Cauchy

Méthode de Piccard

Le principe de la méthode de Piccard est le principe des approximations successives que l'on utilise pour la démonstration de nombreux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles, des solutions des équations fonctionnelles et des solutions des équations intégrales.

Théorème (existence et unicité)

Etant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

où $f(t,x)$ est une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, *continue pour les deux variables (t,x) sur l'ensemble*

$$D = \{(t,x) \in U, \ \ |t - t_0| \leq a, \ \ |x - x_0| \leq b\} \subset U,$$

et satisfait à la condition de Lipschitz en x sur D

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leq L\,|x_2 - x_1|\,, \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D.$$

Alors, il existe une solution unique $x = x(t)$ de l'équation différentielle (1) définie sur l'intervalle ouvert $T =]t_0 - d, t_0 + d[$, avec $d \leq a$ et satisfait à la condition initiale

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Autrement dit, il existe une solution unique pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Démonstration

Soit $x = x(t)$ une solution de l'équation différentielle (1) de sorte que l'on a la relation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

avec la condition initiale

$$x(t_0) = x_0.$$

Il est à remarquer que les deux relations (1) et (2) sont équivalentes à l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \tag{3}$$

Pour la vérification de cette relation, supposons que l'identité (3) est réalisée, portant $t = t_0$ dans (3) nous aurons l'égalité (2) et dérivons par rapport à t nous obtenons la relation (1) .

Supposons maintenant que les relations (1) et (2) sont vérifiées, alors intégrant (1) entre t_0 et t, nous obtenons la relation (3) .

1. *Existence de la solution*

La fonction $f(t,x)$ étant continue sur l'ensemble fermé et borné D, alors il existe une constante positive M telle que

$$|f(t,x)| \leq M, \quad \forall \ (t,x) \in D. \tag{4}$$

Soit $x_n(t)$ une suite de fonctions définie par

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad n = 1, 2, ... \tag{5}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0, \\
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau)) d\tau, \\
&\vdots \\
x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau)) d\tau \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Les fonctions $x_n(t)$ de la suite (5) sont définies et continues sur le segment $\overline{T} = [t_0 - d, t_0 + d]$, et leurs graphes appartiennent à l'ensemble D, c'est à dire

$$x_n(t) \in C\left(\overline{T}, \mathbb{R}\right) \ \text{ et } \ \left\{(t, x_n(t)), \ \ t \in \overline{T}\right\} \subset D, \ \ n = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

En effet, de la relation (5), on a pour $n = 1$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau,$$

d'où il est clair de voir que la fonction $x_1(t)$ est définie et continue sur le segment $T = [t_0 - a, t_0 + a]$ et, on a en vertu de (4)

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_0)| \, d\tau \\ &\leq M \, |t - t_0| \, . \end{aligned}$$

D'où, on remarque que le graphe de la fonction x_1 appartient à D si $|t - t_0| \leq \dfrac{b}{M}$.

Posons

$$d = \min(a, \frac{b}{M}), \tag{7}$$

on aura le graphe de la fonction $x_1(t)$ se trouve dans D pour $t \in \overline{T}$.

$$\{(t, x_1(t)), \quad t \in \overline{T}\} \subset D.$$

Par récurrence, on suppose que la relation (6) est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $x_n(t) \in C(\overline{T}, \mathbb{R})$ et $\{(t, x_n), \, t \in \overline{T}\} \subset D$.

De la relation (5) , on obtient

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau, \tag{8}$$

d'où on remarque que la fonction $x_{n+1}(t)$ est bien définie et continue sur $\overline{T}$. De plus,

$$\begin{aligned} |x_{n+1}(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau))| \, d\tau \\ &\leq M \, |t - t_0| \\ &\leq Md \leq b, \end{aligned}$$

en tenant compte des relations (4) et (7) , on obtient

$$\{(t, x_{n+1}), \; t \in \overline{T}\} \subset D.$$

Il est à noter que la convergence uniforme de la suite (8) sur le segment $\overline{T}$ est équivalente à celle de la série des fonctions

$$x_0+\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=x_0(t)+[x_1(t)-x_0(t)]+...+[x_{n+1}(t)-x_n(t)]+... \quad (9)$$

Voir que, pour $|x_1(t)-x_0(t)|$, on a

$$\begin{aligned} |x_1(t)-x_0(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}|f(\tau,\varphi_0(\tau))|\,d\tau \\ &\leq M\,|t-t_0|, \end{aligned}$$

aussi, pour $|x_2(t)-x_1(t)|$, on a

$$\begin{aligned} |x_2(t)-x_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}|f(\tau,x_1(\tau))-f(\tau,x_0(\tau))|\,d\tau \\ &\leq L\int_{t_0}^{t}|x_1(\tau)-x_0(\tau)|\,d\tau \\ &\leq ML\int_{t_0}^{t}|\tau-t_0|\,d\tau \\ &= ML\frac{|t-t_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

Par itération, pour $|x_n(t)-x_{n-1}(t)|$, on aura

$$|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\leq ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!},$$

d'où, pour $|x_{n+1}(t)-x_n(t)|$, on obtient

$$\begin{aligned} |x_{n+1}(t)-x_n(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}|f(\tau,x_n(\tau))-f(\tau,x_{n-1}(\tau))|\,d\tau \\ &\leq L\int_{t_0}^{t}|x_n(\tau)-x_{n-1}(\tau)|\,d\tau \\ &\leq ML^n\int_{t_0}^{t}\frac{|\tau-t_0|^n}{n!}d\tau \\ &= ML^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

ou encore

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq ML^n \frac{d^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall t \in \overline{T}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \max |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \\ &\leq ML^n \frac{d^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

on remarque que la série (9), est majorée par

$$\begin{aligned} x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) &\leq |x_0| + Md + ... + ML^n \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} + ... \\ &= |x_0| + \sum_{n=0}^{\infty} ML^n \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= |x_0| + \frac{M}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Ld)^n}{n!} \\ &= |x_0| + \frac{M}{L} \left(e^{Ld} - 1\right). \end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme de la série (9) et par conséquent la convergence uniforme de la suite $x_n(t)$ vers une fonction $x(t)$ continue sur $\overline{T}$

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n(t) - x(t)\| = 0. \tag{10}$$

Démontrons que le graphe de la fonction $x(t)$ appartient à D. Autrement dit, on a

$$\{(t, x(t)),\ t \in \overline{T}\} \subset D.$$

En effet, faisons tendre n vers ∞ dans la relation (8), il vient

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad \forall t \in \overline{T},$$

d'où

$$|x(t) - x_0| \leq b, \quad \forall t \in \overline{T},$$

ou encore

$$\{(t, \varphi(t),\ t \in \overline{T}\} \subset D.$$

Il reste maintenant de montrer que la fonction $x(t)$ est solution de l'équation intégrale (3)

$$\begin{aligned}
\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))d\tau\right| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))|\, d\tau \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} |x_n(\tau) - x(\tau)|\, d\tau \\
&\leq Ld\, \|x_n - x\|
\end{aligned}$$

En vertu de la relation (10), on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau)) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad t \in \overline{T},$$

faisons tendre n vers ∞ dans l'expression (5), on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t) &= x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau)) \\
&= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau,
\end{aligned}$$

ou encore

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad t \in \overline{T}.$$

2. *Unicité de la solution*

Pour la démonstration de l'unicité de la solution de l'équation différentielle (1), on doit utiliser le lemme de (Gronwall-Bellman) suivant.

Lemme 1 (Gronwall-Bellman)
Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions scalaires continues et positives sur $[t_0, \infty[$, *avec*

$$x(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau, \qquad \forall t \in [t_0, \infty[, \quad C > 0, \tag{11}$$

alors, on a

$$x(t) \leq C \exp \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau, \qquad \forall t \in [t_0, \infty[. \tag{12}$$

Démonstration

De l'inégalité (11) , il découle

$$\frac{x(t)}{C + \int_{t_0}^{t} x(\tau) y(\tau) d\tau} \leq 1, \tag{13}$$

multiplions l'expression (13) par la fonction positive $y(t)$, on obtient

$$\frac{x(t) y(t)}{C + \int_{t_0}^{t} x(\tau) y(\tau) d\tau} \leq y(t). \tag{14}$$

D'où par intégration des deux membres de l'inégalité (14), il suit

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x(t) y(t)}{C + \int_{t_0}^{t} x(\tau) y(\tau) d\tau} dt \leq \int_{t_0}^{t} y(t) dt,$$

ou encore

$$\ln \left(C + \int_{t_0}^{t} x(\tau) y(\tau) d\tau \right) - \ln C \leq \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau,$$

d'ou, obtient la relation

$$C + \int_{t_0}^{t} x(\tau) y(\tau) d\tau \leq C \exp \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau,$$

ou encore, en tenant compte de l'inégalité (11) , il vient

$$x(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} x(\tau) y(\tau) d\tau \leq C \exp \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau.$$

Remarque 1

Le lemme de Gronwall-Bellman reste valable si l'on prend $C = 0$.

En effet, passant à la limite quand $C \to 0$ dans les expressions (11) et (12) .

Lemme 2 (Gronwall-Bellman)

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions scalaires continues et positives sur $]-\infty, t_0]$, avec

$$x(t) \leq C + \int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau, \qquad \forall t \in]-\infty, t_0], \quad C > 0, \tag{15}$$

alors, on a

$$x(t) \leq C \exp \int_t^{t_0} y(\tau)d\tau, \qquad \forall t \in]-\infty, t_0]. \tag{16}$$

Démonstration

De l'inégalité (15) , il découle

$$\frac{x(t)}{C + \int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau} \leq 1, \tag{17}$$

multiplions l'expression (17) par la fonction négative $-y(t)$, on obtient

$$\frac{-x(t)y(t)}{C + \int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau} \geq -y(t). \tag{18}$$

D'où par intégration des deux membres de l'inégalité (18), il suit

$$\int_t^{t_0} \frac{-x(t)y(t)}{C + \int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau} dt \geq \int_t^{t_0} -y(t)dt,$$

ou encore

$$\ln C - \ln \left(C + \int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau \right) \geq \int_t^{t_0} -y(\tau)d\tau,$$

d'ou, obtient la relation

$$\ln \left(C + \int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau \right) - \ln C \leq \int_t^{t_0} y(\tau)d\tau,$$

ou encore, en tenant compte de l'inégalité (15) , il vient

$$x(t) \leq C + \int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau \leq C \exp \int_t^{t_0} y(\tau)d\tau.$$

Passons maintenant à l'unicité de la solution de l'équation différentielle (1). Soient $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ deux solutions avec les mêmes conditions initiales

$$\varphi(t_0) = x_0 \text{ et } \psi(t_0) = x_0,$$

alors pour $t \in [t_0, t_0 + d]$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| \, d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau, \end{aligned}$$

ou encore

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau. \tag{19}$$

Appliquons le lemme de Gronwall-Bellman pour l'expression (19) en définissant les paramètres du lemme comme suit

$$x(t) = |\varphi(t) - \psi(t)|, \quad y(t) = L \quad \text{et} \quad C = 0.$$

D'où, on obtient $x(t) = |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$ sur l'intervalle $[t_0, t_0 + d]$, c'est à dire

$$\varphi(t) = \psi(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + d],$$

et d'une façon analogue, on traite la cas où $t \in [t_0 - d, t_0]$.

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr