Théorème d'existence et d'unicité
(Méthode de Piccard)

Le principe de la méthode de Piccard est le principe des approximations successives que l'on utilise pour la démonstration de nombreux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles, fonctionnelles et intégrales.

Théorème (dit théorème **d'existence et d'unicité**)
Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

où $f(t, x)$ est une fonction continue de deux variables (t, x) sur l'ensemble

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mid t - t_0 \mid \leq a, \quad \mid x - x_0 \mid \leq b\} \subset U,$$

et satisfait à la condition de Lipschitz en x

$$\mid f(t, x_2) - f(t, x_1) \mid \leq L \mid x_2 - x_1 \mid, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

Alors, il existe une solution et une seule $x = \varphi(t)$ de l'équation (1) définie sur l'intervalle $T =]t_0 - d, t_0 + d[$, avec $d \leq a$ et satisfait à la condition

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

Démonstration
Soit $x = \varphi(t)$ une solution de l'équation (1) de sorte que l'on a la relation

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{3}$$

et soit

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{4}$$

la condition initiale à laquelle cette solution doit satisfaire.
Il est à remarquer que les deux relations (3) et (4) sont équivalentes à l'équation intégrale

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \tag{5}$$

Pour la vérification de cette relation, supposons que l'identité (5) est réalisée, portant $t = t_0$ dans (5) nous aurons l'égalité (4) et dérivons par rapport à t nous obtenons la relation (3).

Supposons maintenant que les relations (3) et (4) sont vérifiées, alors intégrant (3) entre t_0 et t, nous obtenons la relation (5).

Existence de la solution

La fonction $f(t,x)$ étant continue dans l'ensemble D fermé et borné, alors il existe une constante positive M telle que

$$\mid f(t,x) \mid \leq M, \quad \forall\ (t,x) \in D \tag{6}$$

Soit maintenant la suite de fonctions

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), ...\varphi_i(t), ...$$

définie par

$$\varphi_0(t) = x_0; \quad \varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_{i-1}(\tau))d\tau, \quad i = 1, 2, ... \tag{7}$$

• Montrons que toutes les fonctions $\varphi_i(t)$ de la suite (7) sont définies et continues sur le segment T, autrement dit

$$\varphi_i(t) \in C(T, \mathbb{R}), \quad i = 0, 1, 2, ...$$

• Montrons que les graphes de ces fonctions appartiennent à l'ensemble D, autrement dit

$$\{(t, \varphi_i(t)), \ \ t \in T\} \subset D, \quad i = 0, 1, 2, ...$$

De la relation (7), on a pour $i = 1$

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)d\tau,$$

d'où il est clair de voir que la fonction $\varphi_1(t)$ est définie et continue sur le segment $T = [t_0 - a, t_0 + a]$ et, on a en vertu de (6)

$$\begin{aligned} \mid \varphi_1(t) - x_0 \mid \ & \leq \int_{t_0}^{t} \mid f(\tau, x_0) \mid d\tau \\ & \leq M \mid t - t_0 \mid \end{aligned}$$

d'où, on remarque que le graphe de la fonction φ_1 appartient à D si $\mid t-t_0 \mid \leq \dfrac{b}{M}$.

Posons

$$d=\min(a,\frac{b}{M}), \tag{8}$$

on obtient

$$\{(t,\varphi_1(t)),\quad t\in T\}\subset D.$$

Autrement dit que le graphe de la fonction φ_1 se trouve dans D si $t\in T$.

Supposons que la relation est vraie pour $i\in\mathbb{N}$ c'est-à-dire

- La fonction $\varphi_i(t)\in C(T,\mathbb{R})$ est une fonction définie et continue sur T.
- Le graphe de la fonction φ_i appartient à D,

$$\{(t,\varphi_i),\ t\in T\}\subset D. \tag{9}$$

De la relation (7), on a

$$\varphi_{i+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi_i(\tau))d\tau,$$

il vient que la fonction $\varphi_{i+1}(t)$ est bien définie et continue sur T. De plus,

$$\mid \varphi_{i+1}(t)-x_0 \mid\leq \int_{t_0}^{t}\mid f(\tau,\varphi_i(\tau))\mid d\tau\leq M\mid t-t_0\mid\leq Md\leq b, \tag{10}$$

tenant compte des relations (6), (8), (9), on obtient

$$\{(t,\varphi_{i+1}),\ t\in T\}\subset D.$$

Il est à noter que la convergence uniforme de la suite (7) sur le segment T est équivalente à celle de la série des fonctions

$$\varphi_0(t)+[\varphi_1(t)-\varphi_0(t)]+...+[\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)]+... \tag{11}$$

Voir que,

$$\mid \varphi_1(t)-\varphi_0(t)\mid\leq\int_{t_0}^{t}\mid f(\tau,\varphi_0(\tau))\mid d\tau\leq M\mid t-t_0\mid, \tag{12}$$

alors

$$
\begin{aligned}
| \varphi_2(t) - \varphi_1(t) | &\leq \int_{t_0}^{t} | f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_0(\tau)) | \, d\tau \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} | \varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau) | \, d\tau \\
&\leq ML \int_{t_0}^{t} | \tau - t_0 | \, d\tau \\
&= ML \frac{| t - t_0 |^2}{2!}
\end{aligned}
$$

Par récurrence, supposons que

$$
| \varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t) | \leq ML^{i-1} \frac{| t - t_0 |^i}{i!}, \tag{13}
$$

alors, on obtient

$$
\begin{aligned}
| \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t) | &\leq \int_{t_0}^{t} | f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi_{i-1}(\tau)) | \, d\tau \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} | \varphi_i(\tau) - \varphi_{i-1}(\tau) | \, d\tau \\
&\leq ML^i \int_{t_0}^{t} \frac{| \tau - t_0 |^i}{i!} d\tau = ML^i \frac{| t - t_0 |^{i+1}}{(i+1)!},
\end{aligned}
$$

finalement, on obtient

$$
| \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t) | \leq ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!}, \quad \forall t \in T, \quad i = 0, 1, 2, ...
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\| \varphi_{i+1} - \varphi_i \| &= \max | \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t) | \\
&\leq ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!}, \quad i = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

Pour la série (11), on a la série majorante

$$
\begin{aligned}
& | x_0 | + Md + ML \frac{d^2}{2!} + ML^2 \frac{d^3}{3!} + ... + ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!} + ... \\
&= | x_0 | + \sum_{i=0}^{\infty} ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!} \\
&= | x_0 | + \frac{M}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ld)^i}{i!} \\
&= | x_0 | + \frac{M}{L} (e^{Ld} - 1) < \infty
\end{aligned}
$$

Donc la série (11) converge uniformément sur$T$ vers une fonction $\varphi(t)$ continue sur T (en vertus du critère de Weistrauss) c'est-à-dire

$$\lim_{i\to\infty} \parallel \varphi_i - \varphi \parallel = 0 \tag{14}$$

Démontrons que le graphe de la fonction φ appartient à D. Autrement dit

$$\{(t, \varphi(t), \ t \in T\} \subset D.$$

En effet,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau, \quad \forall t \in T,$$

est obtenue en faisant tendre i vers ∞ dans la relation (10), il vient

$$\mid \varphi(t) - x_0 \mid \leq b, \quad \forall t \in T,$$

d'où

$$\{(t, \varphi(t), \ t \in T\} \subset D.$$

Il reste maintenant à montrer que la fonction $\varphi(t)$ est solution de l'équation (5), on a

$$\begin{aligned} \mid \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \mid &\leq \int_{t_0}^{t} \mid f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau)) \mid d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} \mid \varphi_i(\tau) - \varphi(\tau) \mid d\tau \\ &\leq Ld \parallel \varphi_i - \varphi \parallel \end{aligned}$$

En tenant compte de (14), on obtient

$$\lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_i(\tau)) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau, \quad t \in T.$$

Faisant tendre i vers ∞ dans l'expression (7), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} \varphi_{i+1}(t) &= x_0 + \lim_{i\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_i(\tau)) \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau, \quad t \in T.$$

Unicité de la solution

Pour la démonstration de l'unicité de la solution de l'équation différentielle, on doit utiliser le lemme de (Gronwalle-Bellman) suivant.

Lemme (Gronwalle-Bellman)

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions scalaires continues et positives sur $[t_0, \infty[$; avec

$$x(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau, \qquad \forall t \in [t_0, \infty[, \quad c > 0, \tag{15}$$

alors, on a

$$x(t) \leq c \exp \int_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau, \qquad \forall t \in [t_0, \infty[. \tag{16}$$

Démonstration

De l'égalité (15) , il découle

$$\frac{x(t)}{c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau} \leq 1,$$

multiplions cette expression par la fonction positive $y(t)$, on obtient

$$\frac{x(t)y(t)}{c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau} \leq y(t). \tag{17}$$

d'où

$$\ln[c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau] - \ln c \leq \int_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau$$

car, on a

$$\frac{d}{dt}[c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau] = x(t)y(t).$$

En tenant compte de l'inégalité (15) , on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &\leq c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau \\ &\leq c \exp \int_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

Remarque 1

Le lemme reste valable si on prend $c = 0$.

En effet, passant à la limite quand $c \to 0$ dans les expressions (15) et (16) .

Remarque 2

Si l'on considère l'intervalle $]-\infty, t_0]$ et l'inégalité

$$x(t) \leq c + \int_{t}^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau, \quad \forall t \in]-\infty, t_0], \quad c > 0, \tag{18}$$

au lieu de (15) , on peut avoir l'inégalité

$$x(t) \leq c \exp \int_{t}^{t_0} y(\tau)d\tau, \quad \forall t \in]-\infty, t_0] \text{ au lieu } (16) .$$

En effet, de (18) , on obtient

$$\frac{-x(t)y(t)}{c + \int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau} \geq -y(t),$$

d'où par intégration, on obtient

$$\ln c - \ln[c + \int_{t}^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau] \geq - \int_{t}^{t_0} y(\tau)d\tau,$$

en tenant compte de l'inégalité (18) , alors

$$\begin{aligned} x(t) &\leq c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau \\ &\leq c \exp \int_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

Passons maintenant à l'unicité. Soient $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ deux solutions avec la conditions initiales

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad \text{et } \psi(t_0) = x_0,$$

alors pour $t \in [t_0, t_0 + d]$, on a

$$\begin{aligned} \mid \varphi(t) - \psi(t) \mid \; &\leq \int_{t_0}^{t} \mid f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau)) \mid d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} \mid \varphi(\tau) - \psi(\tau) \mid d\tau. \end{aligned}$$

Posons la fonction

$$x(t) = \mid \varphi(t) - \psi(t) \mid,$$

et la fonction

$$y(t) = A,$$

et la constante $c = 0$.

Applique le lemme de Gronwalle-Bellman à la relation au dessus, on obtient $x(t) = 0$ sur l'intervalle $[t_0, t_0 + d]$, c'est à dire

$$\varphi(t) = \psi(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + d],$$

et d'une manière analogue, on traite la cas où $t \in [t_0 - d, t_0]$. **C.Q.F.D**

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.