§2. Equations homogènes

Fonction homogène

On dit que la fonction $f(t, x)$ est homogène de degré n par rapport aux variables t et x si l'on a pour tout $k \in \mathbb{R}$, la relation

$$f(kt, kx) = k^n f(t, x).$$

Exemple 1

Soit la fonction

$$f(t, x) = \sqrt[3]{2t^3 + tx^2},$$

cette fonction est homogène de degré 1.

En effet, on a

$$\begin{aligned} f(kt, kx) &= \sqrt[3]{2(kt)^3 + kt(kx)^2} \\ &= k\sqrt[3]{2t^3 + tx^2} \\ &= kf(t, x). \end{aligned}$$

Exemple 2

Soit la fonction

$$f(t, x) = \frac{tx + 3x^2}{tx},$$

cette fonction est homogène de degré 0.

En effet, on a

$$\begin{aligned} f(kt, kx) &= \frac{(kt)(kx) + 3(kx)^2}{(kt)(kx)} \\ &= \frac{tx + 3x^2}{tx} \\ &= k^0 f(t, x). \end{aligned}$$

Equations différentielles homogènes

On appelle équation différentielle homogène toute équation de la forme

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right), \tag{1}$$

ou encore sous la forme explicite

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0,$$

où les fonctions $M(t,x)$ et $N(t,x)$ sont homogènes de même degré.

Pour résoudre une telle équation, on substitue le changement de variable suivant

$$y = \frac{x}{t}$$

où y est une fonction inconnue de la variable indépendante $t,$ on tire

$$dx = ydt + tdy,$$

ou encore

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y + t\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Portons cette expression dans l'équation différentielle (1), on obtient une équation dont on peut séparer les variables

$$y + t\frac{dy}{dt} = f(y),$$

d'où l'équation à variables séparées

$$\frac{dy}{f(y) - y} = \frac{dt}{t}.$$

Après intégration des deux membres, on obtient

$$\int \frac{dy}{f(y) - y} = \ln t + \ln C,$$

on en tire la valeur de y, d'où $x = yt$.

Remarque 1

L'équation différentielle homogène ne change pas si, on remplace la variable t par kt et la fonction x par kx.

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(3t + x)dt + tdx = 0. \tag{2}$$

Solution

Les fonctions $M(t,x) = 3t+x$ et $N(t,x) = t$ sont des fonctions homogènes de même degré 1. En effet, on a

$$\begin{aligned} M(kt,kx) &= 3kt + kx \\ &= k(3t+x) \\ &= kM(t,x), \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} N(kt,kx) &= kt \\ &= kN(t,x). \end{aligned}$$

Appliquons le changement de variable des équations homogènes

$$y = \frac{x}{t},$$

où $y(t)$ est la fonction inconnue de t, on tire

$$dx = ydt + tdy.$$

Portons cette expression dans l'équation (2), on aura une forme explicite de l'équation à variables séparables

$$\begin{aligned} &(3t+x)\,dt + tdx = 0, \\ &(3t+yt)\,dt + t\,(ydt + tdy) = 0, \\ &(3t+2yt)\,dt + tdy = 0, \\ &(2y+3)\,dt + tdy = 0, \quad t \neq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

Séparons les variables de l'équation (3), il vient

$$\frac{1}{t}dt + \frac{1}{2y+3}dy = 0; \qquad t \neq 0; \;\; y \neq -\frac{3}{2}.$$

Après intégration des deux termes de cette équation, on obtient

$$\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|2y+3| = \ln|C|\,; \quad C \neq 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 2y+3 &= C_1 t^2 \Rightarrow \\ y &= C_2 t^2 - \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Substituons la valeur de $y = \frac{x}{t}$ dans la solution (4), on obtient la solution en x

$$x = C_2 t^3 - \frac{3}{2} t. \tag{5}$$

La division de l'équation (3) par la fonction $t(2y+3)$ entraîne la perte des solutions en t et en y

$$t = 0 \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{2} \qquad \text{de l'équation} \quad (3)\,,$$

ou encore la perte des solutions en t et en x

$$t = 0 \quad \text{et} \quad x = -\frac{3}{2} t \qquad \text{de l'équation} \quad (2)\,.$$

On remarque que la solution $x = -\frac{3}{2}t$ est dans la formule (5) si l'on convient de prendre pour la constante C_2 n'importe quelle valeur y compris la valeur nulle $C_2 = 0$.

D'où la solution générale de l'équation (2) donnée comme suit

$$x = C_2 t^3 - \frac{3}{2} t; \quad t = 0.$$

Equations se ramènent à des équations homogènes

Soit l'équation de la forme

$$\dot{x} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 t + c_1}{a_2 x + b_2 t + c_2}\right), \tag{6}$$

• *Premier cas*

Si le déterminant Δ du système d'équations

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 t + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 t + c_2 = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

est non nul alors l'équation différentielle (6) se ramène à une équation homogène.

En effet, faisons le changement de variables suivant

$$t = \tau + \alpha \quad \text{et} \quad x = y + \beta,$$

où α et β sont les racines du système d'équations (7). Autrement dit, l'équation (6) se ramène à une équation homogène par un déplacement de l'origine $(0, 0)$ des coordonnées vers le point (α, β) de l'intersection des droites $a_1x + b_1t + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2t + c_2 = 0$. Après cette transformation, l'équation différentielle (6) change de forme vers l'homogénéité

$$\dot{x} = \dot{y} = f\left(\frac{a_1y + b_1\tau}{a_2y + b_2\tau}\right) = f\left(\frac{a_1\dfrac{y}{\tau} + b_1}{a_2\dfrac{y}{\tau} + b_2}\right).$$

Substituons le changement de variable des équations homogènes dans cette équation

$$z = \frac{y}{\tau} \;\Rightarrow\; \dot{y} = \dot{z}\tau + z,$$

on obtient l'équation à variables séparables suivante

$$\dot{z}\tau + z = f\left(\frac{a_1z + b_1}{a_2z + b_2}\right) = g(z),$$

ou encore

$$\dot{z}\tau = g(z) - z$$

ce qui donne par la suite une équation à variables séparées

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{d\tau}{\tau}.$$

• *Deuxième cas*

Si le déterminant Δ du système d'équations (7) est nul. Autrement dit, les droites ne se coupent pas alors l'équation différentielle (6) se ramène à une équation à variables séparables.

En effet, les droites $a_1x + b_1t + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2t + c_2 = 0$ prennent la forme

$$a_1x + b_1t + c_1 = k\left(a_2x + b_2t\right) + c_1,$$

et l'équation différentielle (6) s'écrit comme suit

$$\dot{x} = f\left(\frac{k(a_2t + b_2x) + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right) = g\left(a_2t + b_2x\right).$$

Il est aisé de voir que cette équation se ramène à une équation différentielle à variables séparables par substitution de la fonction

$$y = a_2t + b_2x \quad \text{ou} \quad y = a_2t + b_2x + c_2.$$

Exemple 4

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = \frac{x - t}{2x - t + 1}. \tag{8}$$

Solution

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ 2x - t + 1 = 0, \end{cases}$$

dont le déterminant Δ est donné par

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ce système d'équations admet comme racines $x = -1$ et $t = -1$, c'est à dire $\alpha = -1$ et $\beta = -1$.

Portons dans l'équation (8) les fonctions $t = \tau - 1$ et $x = y - 1$, on obtient une équation différentielle homogène

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{y - \tau}{2y - \tau},$$

que l'on résout par le moyen des techniques affectés aux équations différentielles homogènes

$$z = \frac{y}{\tau}.$$

La dérivée des deux membres de cette fonction nous donne

$$\frac{dy}{d\tau} = z + \tau \frac{dz}{d\tau},$$

d'où, on obtient l'équation à variables séparables sous la forme

$$z + \tau \frac{dz}{d\tau} = \frac{\tau(z-1)}{\tau(2z-1)}.$$

Après intégration des deux membres de l'équation à variables séparées suivante

$$\frac{2z-1}{2z^2-2z+1} dz = -\frac{d\tau}{\tau},$$

on obtient la solution de l'équation en z et en τ

$$\frac{1}{2} \ln \left|2z^2 - 2z + 1\right| = -\ln|\tau| + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

ou encore

$$\tau\sqrt{2z^2 - 2z + 1} = C. \tag{9}$$

Substituons la valeur de $z = \dfrac{y}{\tau}$ dans la solution (9), on obtient la même solution en y et en τ

$$\sqrt{2y^2 - 2y\tau + \tau^2} = C.$$

Enfin pour avoir la solution générale, on doit passer à la solution en x et en t, d'où il vient

$$\sqrt{(x+1)^2 + (x-t)^2} = C.$$

Exemple 5

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(3t + 3x + 1)\, dt - (t + x - 1)\, dx = 0. \tag{10}$$

Solution

Soit le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+3t+1=0 \\ x+t-1=0, \end{array}\right.$$

dont le déterminant Δ est nul, donné par

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Il est à remarquer que l'équation différentielle (10) se ramène à l'aide du changement de variables

$$y = x + t \Rightarrow dy = dx + dt,$$

à une équation à variables séparables

$$4ydt - (y-1)dy = 0. \tag{11}$$

Séparons les variables, on obtient

$$4dt = \frac{y-1}{y}dy, \quad y \neq 0,$$

après intégration des deux membres de cette équation, il vient

$$4t - y + \ln|y| = C.$$

Passons aux variables x et t, on obtient

$$3t - x + \ln|t+x| = C.$$

La division des deux membres de l'équation (11) par y entraîne la perte de la solution $y = 0$ de cette équation, en d'autre termes la perte de la solution $x = -t$ de l'équation (10) . D'où la solution générale de l'équation différentielle (10) donnée comme suit

$$3t - x + \ln|t+x| = C; \qquad x = -t.$$

Autres équations se ramènent à des équations homogènes

On peut trouver d'autres formes d'équations se ramènent à des équations homogènes par la substitution de l'équation

$$x = y^m, \tag{12}$$

où l'entier m est un nombre inconnu à déterminer.

Substituons l'expression $x = y^m$ dans l'équation différentielle et exigeons l'homogénéité de cette dernière pour trouver le nombre m. Si on ne peut trouver le nombre m cette méthode n'est pas la bonne pour rendre l'équation homogène.

Exemple 6
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$t^3\dot{x} - x^2 = t^4. \tag{13}$$

Solution
Substituons l'expression (12)

$$x = y^m,$$

dans l'équation (13), on obtient

$$mt^3y^{m-1}\dot{y} - y^{2m} = t^4.$$

Cette équation ne sera homogène que si les puissances de tous ses termes sont égales, c'est à dire

$$3 + m - 1 = 2m = 4,$$

les égalités sont vérifiées simultanément pour la valeur $m = 2$. En conséquence, l'équation peut se ramener à une équation homogène par substitution de l'expression

$$x = y^2.$$

§2. Exercices sur les équations homogènes

Résoudre les équations différentielles homogènes et les équations qui se ramènent à des équations homogènes suivantes

1) $(t+2x)\,dt - t dx = 0.$

2) $(t^2+x^2)\,dt - xt dx = 0.$

3) $\sqrt{t^2+x^2}dt = t dx - x dt.$

4) $x^2 dt + (t^2 - tx)\,dx = 0.$

5) $(t+x)\ln\left(\dfrac{t+x}{t}\right) dt + x dt - t dx = 0.$

6) $(t+4x)\,\dot{x} = 2t + 3x - 5.$

7) $\dot{x} = 2\left(\dfrac{x+2}{t+x-1}\right)^2.$

8) $(2t-4x+6)dt + (t+x-3)dx = 0.$

9) $(2t-5x+3)dt - (2t+4x-6)dx = 0.$

10) $(t-x-1)dt + (t+4x-1)dx = 0.$

11) $(t+x)dt + (3t+3x-4)dx = 0.$

12) $(3t+2x+1)dt - (3t+2x-1)dx = 0.$

13) $(t-x-1)dt - (t-x-2)dx = 0.$

14) $(2t+x+1)dt - (4t+2x-3)dx = 0.$

15) $(t-2\sin x+3)dt + \cos x(2t-4\sin x+3)dx = 0.$

16) $t^3(\dot{x}-t) = x^2.$

17) $2t^2\dot{x} = x^3 + tx$

18) $xdt + (2tx + 1)tdx = 0.$

19) $(x - x^2\sqrt{t - t^2x^2})dt + 2tdx = 0.$

20) $3(x^2 + \sqrt{t^6 - x^4})dt - 2txdx = 0.$

§2. Réponses des équations homogènes

1) $x = Ct^2 - t;\quad t = -0.$

2) $x = t\sqrt{\ln \dfrac{t^2}{C^2}};\quad t = 0.$

3) $2x = Ct^2 - \dfrac{1}{C};\quad t = 0.$

4) $x = C \exp\left(\dfrac{x}{t}\right).$

5) $\ln\left(\dfrac{t+x}{t}\right) = Ct.$

6) $(-t + x + 5)^5(t + 2x - 2) = C.$

7) $x + 2 = C\exp\left(-2\arctan\dfrac{x+2}{t-3}\right).$

8) $(-2t + x)^3 = C(-t + x - 1)^2;\quad x = t + 1.$

9) $(-t + 4x - 3)^2(2t + x + -3) = C.$

10) $\ln\left((t-1)^2 + 4x^2\right) + \arctan\dfrac{2x}{t-1} = C.$

11) $t + 3x + 2\ln(-t - x + 2) = C.$

12) $\ln(15t + 10x - 1) - \dfrac{5}{2}(-t + x) = C.$

13) $(-t + x + 2)^2 + 2t = C.$

14) $2t + x - 1 = C\exp(-t + 2x).$

15) $4t + 8\sin x + 3\ln(4t - 8\sin x + 9) = C.$

16) $t^2 = (t^2 - x)\ln Ct;\quad x = t^2;\quad m = 2.$

17) $t = -x^2 \ln Ct; \quad x = 0; \quad m = \dfrac{1}{2}.$

18) $x^2 \exp(\dfrac{-1}{tx}) = C; \quad x = 0; \quad t = 0; \quad m = -1.$

19) $2\sqrt{\dfrac{1}{tx^2} - 1} = -\ln Ct; \quad tx^2 = 1; \quad x = 0; \quad m = -\dfrac{1}{2}.$

20) $\arcsin \dfrac{x^2}{|t^3|} = \ln Ct^3; \quad x^2 = |t^3|\,; \quad m = \dfrac{3}{2}.$

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Laboratory of Pure and Applied Mathematics
and
Laboratory of Signals Analysis and Systems
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr