§2. Equations différentielles à fonctions homogènes

Fonction homogène

On dit que la fonction $f(t,x)$ est homogène de degré n par rapport aux variables t et x si l'on a pour tout $k \in \mathbb{R}$, la relation

$$f(kt,kx) = k^n f(t,x). \tag{1}$$

Exemple 1

Soit la fonction

$$f(t,x) = \sqrt[3]{2t^3 + tx^2},$$

cette fonction est homogène de degré 1.

En effet, on a

$$\begin{aligned} f(kt,kx) &= \sqrt[3]{2(kt)^3 + kt(kx)^2} \\ &= k\sqrt[3]{2t^3 + tx^2} \\ &= kf(t,x). \end{aligned}$$

Exemple 2

Soit la fonction

$$f(t,x) = \frac{tx + 3x^2}{tx},$$

cette fonction est homogène de degré 0.

En effet, on a

$$\begin{aligned} f(kt,kx) &= \frac{(kt)(kx) + 3(kx)^2}{(kt)(kx)} \\ &= \frac{tx + 3x^2}{tx} \\ &= k^0 f(t,x). \end{aligned}$$

Equations différentielles à fonctions homogènes

On appelle équation différentielle à fonctions homogènes toute équation différentielle de la forme

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2}$$

où $f(t,x)$ est une fonction homogène de degré zéro. C'est à dire, on a la relation $f(t,x) = f(kt,kx)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$, en particulier prenons $k = \frac{1}{t}$, on obtient

$$f(t,x) = f(\frac{1}{t}t, \frac{1}{t}x) = f\left(1, \frac{x}{t}\right)$$

et l'équation différentielle à fonctions homogènes (2) devient

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f\left(1, \frac{x}{t}\right), \tag{3}$$

ou encore sous la forme explicite

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0, \tag{4}$$

où les fonctions $M(t,x)$ et $N(t,x)$ sont homogènes de même degré.

Pour résoudre une telle équation, on substitue le changement de variable suivant

$$y = \frac{x}{t} \tag{5}$$

où y est une fonction inconnue de la variable indépendante t, on aura

$$dx = ydt + tdy,$$

ou encore

$$\dot{x} = y + t\dot{y}. \tag{6}$$

L'équation différentielle (3) devient

$$y + t\dot{y} = f(y).$$

Portons cette expression dans l'équation différentielle (1), on obtient une équation différentielle dont on peut séparer les variables

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t},$$

d'où l'équation différentielle à variables séparées

$$\frac{dy}{f(y) - y} = \frac{dt}{t}; \quad t \neq 0 \text{ et } f(y) \neq y.$$

Après intégration des deux membres, on obtient

$$\int \frac{dy}{f(y) - y} = \ln|t| + \ln C. \tag{7}$$

Finalement, on revient à la variable x par la relation $y = \dfrac{x}{t}$.

Remarque 1

L'équation différentielle à fonctions homogènes ne change pas si, on remplace la variable t par kt et la fonction x par kx.

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = -\frac{3t + x}{t}. \tag{8}$$

Solution

Pour $t \neq 0$ la fonction $f(t, x) = -\dfrac{3t + x}{t}$ est homogène de degré 0. En effet, on a

$$\begin{aligned} f(kt, kx) &= -\frac{3kt + kx}{kt} \\ &= -\frac{k(3t + x)}{kt} \\ &= f(t, x). \end{aligned}$$

Appliquons le changement de variable des équations différentielles à fonctions homogènes

$$y = \frac{x}{t},$$

où $y(t)$ est la fonction inconnue de t, on obtient

$$dx = ydt + tdy.$$

ou encore

$$\dot{x} = y + t\dot{y}$$

Portons cette expression dans l'équation différentielle (8), on aura une forme explicite de l'équation différentielle à variables séparables

$$\begin{aligned} &(3t + x)\, dt + tdx = 0, \\ &(3t + yt)\, dt + t\,(ydt + tdy) = 0, \\ &(3t + 2yt)\, dt + tdy = 0, \end{aligned}$$

ou encore
$$(2y+3)\,dt + tdy = 0. \tag{9}$$

La division de l'équation différentielle (9) par la fonction $t(2y+3)$ nous donne l'équation différentielle à variables séparées suivante
$$\frac{1}{2y+3}dy = -\frac{1}{t}dt, \quad \text{avec} \quad t \neq 0, \quad y \neq -\frac{3}{2}. \tag{10}$$

Après intégration des deux termes de l'équation différentielle (10), on obtient
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ln|2y+3| = -\ln|t| + \ln|C|\,; \quad C \neq 0,\\
&\ln|2y+3| = -2\ln|t| + 2\ln|C|\,; \quad C \neq 0,\\
&\ln|(2y+3)| = \ln\left|\frac{C_1}{t^2}\right|; \quad C_1 \neq 0,
\end{aligned}$$

ou encore
$$2y+3 = \frac{C_1}{t^2},$$

d'où la solution de l'équation différentielle (10)
$$y = \frac{C_2}{t^2} - \frac{3}{2}. \tag{11}$$

Substituons la valeur de $y = \dfrac{x}{t}$ dans la solution (11), on obtient la solution en x
$$x = \frac{C_2}{t} - \frac{3}{2}t. \tag{12}$$

La division de l'équation (9) par la fonction $t(2y+3)$ entraîne la perte des solutions en t et en y
$$t = 0 \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{2} \quad \text{de l'équation} \quad (10)\,,$$

ou encore la perte des solutions en t et en x
$$t = 0 \quad \text{et} \quad x = -\frac{3}{2}t \quad \text{de l'équation} \quad (8)\,.$$

On remarque que la solution $x = -\dfrac{3}{2}t$ est dans la formule (11) si l'on convient de prendre pour la constante C_2 n'importe quelle valeur y compris la valeur nulle $C_2 = 0$.

D'où, on obtient la solution générale de l'équation différentielle (8)

$$x = C_2 t^3 - \frac{3}{2} t; \quad t = 0.$$

Equations se ramènent à des équations différentielles à fonctions homogènes

Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right), \tag{13}$$

pour ce genre d'équations différentielles, on construit le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

1. *Premier cas*

Si le déterminant Δ du système d'équations linéaires (14) est non nul

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

L'équation différentielle (7) se ramène à une équation différentielle à fonctions homogènes.

En effet, faisons le changement de variables suivant

$$t = \tau + \alpha \quad \text{et} \quad x = y + \beta,$$

où α et β sont les racines du système d'équations linéaires (14). Autrement dit, l'équation différentielle (13) se ramène à une équation différentielle à fonctions homogènes par un déplacement de l'origine $(0, 0)$ des coordonnées vers le point (α, β) de l'intersection des droites $a_1 t + b_1 x + c_1 = 0$ et $a_2 t + b_2 x + c_2 = 0$. Après cette transformation, l'équation différentielle (13) change de forme vers l'homogénéité

$$\dot{x} = \dot{y} = f\left(\frac{a_1 \tau + b_1 y}{a_2 \tau + b_2 y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{\tau}}{a_2 + b_2 \frac{y}{\tau}}\right). \tag{15}$$

Substituons le changement de variable des équations différentielles à fonctions homogènes dans cette équation

$$z = \frac{y}{\tau} \;\Rightarrow\; \dot{y} = z + \dot{z}\tau,$$

on obtient l'équation à variables séparables suivante

$$z + \dot{z}\tau = f\left(\frac{a_1 + b_1 z}{a_2 + b_2 z}\right) = g(z),$$

ou encore

$$\dot{z}\tau = g(z) - z,$$

ce qui donne par la suite une équation à variables séparées

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{d\tau}{\tau}.$$

2. *Deuxième cas*

Si le déterminant Δ du système d'équations linéaires (14) est nul.

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Autrement dit, les droites ne se coupent pas alors l'équation différentielle (13) se ramène à une équation à variables séparables.

En effet, les droites $a_1 t + b_1 x + c_1 = 0$ et $a_2 t + b_2 x + c_2 = 0$ prennent la forme

$$a_1 t + b_1 x + c_1 = k\,(a_2 t + b_2 x) + c_2,$$

et l'équation différentielle (13) s'écrit comme suit

$$\dot{x} = f\left(\frac{k(a_2 t + b_2 x) + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right) = g\,(a_2 t + b_2 x)\,. \tag{16}$$

Il est aisé de voir que cette équation différentielle se ramène à une équation différentielle à variables séparables par substitution de la fonction

$$y = a_2 t + b_2 x \quad \text{ou} \quad y = a_2 t + b_2 x + c_2. \tag{17}$$

Exemple 4
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = \frac{x - t}{2x - t + 1}. \tag{18}$$

Solution

Soit le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ 2x - t + 1 = 0, \end{cases}$$

il est aisé de voir que le déterminant Δ est non nul

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ce système d'équations admet comme racines $x = -1$ et $t = -1$, c'est à dire $\alpha = -1$ et $\beta = -1$. Portons dans l'équation différentielle (18) les fonctions $t = \tau - 1$ et $x = y - 1$, on obtient une équation différentielle à fonctions homogènes

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{y - \tau}{2y - \tau}, \tag{19}$$

que l'on résout par le moyen des techniques affectés aux équations différentielles à fonctions homogènes

$$z = \frac{y}{\tau}.$$

La dérivée des deux membres de cette fonction nous donne

$$\frac{dy}{d\tau} = z + \tau \frac{dz}{d\tau},$$

d'où, on obtient l'équation différentielle à variables séparables sous la forme

$$z + \tau \frac{dz}{d\tau} = \frac{\tau(z-1)}{\tau(2z-1)}.$$

ou encore

$$\frac{2z-1}{2z^2 - 2z + 1} dz = -\frac{d\tau}{\tau}, \tag{20}$$

Après intégration des deux membres de l'équation différentielle à variables séparées (20), on obtient la solution de l'équation différentielle (19) en z et en τ

$$\frac{1}{2} \ln \left| 2z^2 - 2z + 1 \right| = -\ln |\tau| + \ln |C| , \quad C \neq 0,$$

ou encore

$$\tau \sqrt{2z^2 - 2z + 1} = C. \tag{21}$$

Substituons la valeur de $z = \dfrac{y}{\tau}$ dans la solution (21), on obtient la même solution en y et en τ

$$\sqrt{2y^2 - 2y\tau + \tau^2} = C.$$

Enfin pour avoir la solution générale, on doit passer à la solution en x et en t, d'où il vient

$$\sqrt{(x+1)^2 + (x-t)^2} = C. \tag{22}$$

Exemple 5
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(3t + 3x + 1)\, dt - (t + x - 1)\, dx = 0. \tag{23}$$

Solution
Soit le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 3x + 3t + 1 = 0 \\ x + t - 1 = 0, \end{cases}$$

il est aisé de voir que le déterminant Δ est nul

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Il est à remarquer que l'équation différentielle (23) se ramène à l'aide du changement de variables

$$y = x + t \Rightarrow dy = dx + dt,$$

à une équation différentielle à variables séparables

$$4ydt - (y-1)dy = 0. \tag{24}$$

Séparons les variables, on obtient

$$4dt = \frac{y-1}{y} dy, \quad y \neq 0, \tag{25}$$

après intégration des deux membres de l'équation différentielle à variables séparées (25), il vient

$$4t - y + \ln |y| = C.$$

Passons aux variables x et t, on obtient

$$3t - x + \ln |t + x| = C.$$

La division des deux membres de l'équation (24) par y entraîne la perte de la solution $y = 0$ de cette équation, en d'autre termes la perte de la solution $x = -t$ de l'équation (23) . D'où la solution générale de l'équation différentielle (23) est donnée comme suit

$$3t - x + \ln|t + x| = C; \quad x = -t.$$

Autres équations se ramènent à des équations différentielles à fonctions homogènes

On peut trouver d'autres formes d'équations se ramènent à des équations différentielles à fonctions homogènes par la substitution de l'équation

$$x = y^m, \tag{26}$$

où l'entier m est un nombre inconnu à déterminer.

Substituons l'expression $x = y^m$ dans l'équation différentielle donnée et exigeons l'homogénéité des fonctions de cette équation différentielle pour trouver le nombre m. Si on ne peut pas trouver le nombre m cette méthode n'est pas la bonne pour rendre l'équation différentielle une équation différentielle à fonctions homogènes.

Exemple 6

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$t^3\dot{x} - x^2 = t^4. \tag{27}$$

Solution

Substituons l'expression (26)

$$x = y^m,$$

dans l'équation (27), on obtient

$$mt^3y^{m-1}\dot{y} - y^{2m} = t^4.$$

Cette équation différentielle sera une équation différentielle à fonctions homogènes que si les puissances de tous ses termes sont égales, c'est à dire

$$3 + (m - 1) = 2m = 4,$$

les égalités sont vérifiées simultanément pour la valeur $m = 2$. En conséquence, l'équation différentielle (27) peut se ramener à une équation différentielle à fonctions homogènes par la substitution de l'expression $x = y^2$ dans l'équation (27) d'où, on obtient

$$2t^3 y\dot{y} - y^4 = t^4.$$

ou encore l'équation différentielle à fonctions homogènes suivante

$$\dot{y} = \frac{t^4 + y^4}{2t^3 y}.$$

§2. Exercices sur les équations différentielles à fonctions homogènes

Résoudre les équations différentielles à fonctions homogènes et les équations qui se ramènent à des équations différentielles à fonctions homogènes suivantes

1) $(t+2x)\,dt - tdx = 0.$

2) $\left(t^2+x^2\right)dt - xtdx = 0.$

3) $\sqrt{t^2+x^2}dt = tdx - xdt.$

4) $x^2dt + \left(t^2 - tx\right)dx = 0.$

5) $(t+x)\ln\left(\dfrac{t+x}{t}\right)dt + xdt - tdx = 0.$

6) $(t+4x)\,\dot{x} = 2t+3x-5.$

7) $\dot{x} = 2\left(\dfrac{x+2}{t+x-1}\right)^2.$

8) $(2t-4x+6)dt + (t+x-3)dx = 0.$

9) $(2t-5x+3)dt - (2t+4x-6)dx = 0.$

10) $(t-x-1)dt + (t+4x-1)dx = 0.$

11) $(t+x)dt + (3t+3x-4)dx = 0.$

12) $(3t+2x+1)dt - (3t+2x-1)dx = 0.$

13) $(t-x-1)dt - (t-x-2)dx = 0.$

14) $(2t+x+1)dt - (4t+2x-3)dx = 0.$

15) $(t-2\sin x+3)dt + \cos x(2t-4\sin x+3)dx = 0.$

16) $t^3(\dot{x}-t) = x^2.$

17) $2t^2\dot{x} = x^3 + tx$

18) $xdt + (2tx + 1)tdx = 0.$

19) $(x - x^2\sqrt{t - t^2x^2})dt + 2tdx = 0.$

20) $3(x^2 + \sqrt{t^6 - x^4})dt - 2txdx = 0.$

§2. Réponses des équations différentielles à fonctions homogènes

1) $x = Ct^2 - t;\;\; t = -0.$

2) $x = t\sqrt{\ln \frac{t^2}{C^2}};\;\; t = 0.$

3) $2x = Ct^2 - \frac{1}{C};\;\; t = 0.$

4) $x = Ce^{\frac{x}{t}}.$

5) $\ln\left(\frac{t+x}{t}\right) = Ct.$

6) $(-t + x + 5)^5(t + 2x - 2) = C.$

7) $x + 2 = Ce^{\left(-2\arctan \frac{x+2}{t-3}\right)}.$

8) $(-2t + x)^3 = C(-t + x - 1)^2;\;\; x = t + 1.$

9) $(-t + 4x - 3)^2(2t + x + -3) = C.$

10) $\ln\left((t-1)^2 + 4x^2\right) + \arctan \frac{2x}{t-1} = C.$

11) $t + 3x + 2\ln(-t - x + 2) = C.$

12) $\ln(15t + 10x - 1) - \frac{5}{2}(-t + x) = C.$

13) $(-t + x + 2)^2 + 2t = C.$

14) $2t + x - 1 = Ce^{(-t+2x)}.$

15) $4t + 8\sin x + 3\ln(4t - 8\sin x + 9) = C.$

16) $t^2 = (t^2 - x)\ln Ct;\;\; x = t^2;\;\; m = 2.$

17) $t = -x^2 \ln Ct;\;\; x = 0;\;\; m = \frac{1}{2}.$

18) $x^2 e^{\frac{-1}{tx}} = C; \quad x = 0; \quad t = 0; \quad m = -1.$

19) $2\sqrt{\dfrac{1}{tx^2} - 1} = -\ln Ct; \quad tx^2 = 1; \quad x = 0; \quad m = -\dfrac{1}{2}.$

20) $\arcsin \dfrac{x^2}{|t^3|} = \ln Ct^3; \quad x^2 = \left|t^3\right|; \quad m = \dfrac{3}{2}.$

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr