§13. Théorie de Liapounov

Etant donné le système d'équations suivant

$$\dot{x} = Ax + f(t, x), \tag{1}$$

rempli les conditions suivantes
- A est une matrice carrée d'ordre n d'éléments constants
- La fonction $f(t, x)$ est une fonction continue pour $0 \leq t < \infty, \ |x| \leq h$,
- La fonction $f(t, x) = o(|x|)$ uniformément par rapport à t c'est à dire

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(t, x)}{|x|} = 0. \tag{2}$$

Il est aisé de remarquer que la système (1) admet la solution nulle.

Théorème (Liapounov)

Si toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles négatives, alors la solution nulle du système (1) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration

Soit la fonction $y = \varphi(t, x)$ une solution du système linéaire homogène

$$\dot{y} = Ay \tag{3}$$

avec la condition initiale $\varphi(0, x) = x$.

D'après le lemme2, il existe des constantes $R > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$|\varphi(t, x)| \leq R\,|x| \exp(-\alpha t), \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Posons

$$V(x) = \int_0^\infty |\varphi(\tau, x)|^2 \, d\tau. \tag{5}$$

Démontrons que la fonction $V(x)$ dans (5) est une fonction de Liapounov. En effet soit $\Phi(t)$ la matrice fondamentale du système (3) avec la relation

$$\Phi(0) = I,$$

où I représente la matrice de l'unité de sorte que l'on a

$$\varphi(t, x) = \Phi(t)x^0. \tag{6}$$

Alors,

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^\infty \left\langle \Phi(\tau)x^0, \Phi(\tau)x^0 \right\rangle d\tau = \int_0^\infty \left\langle \Phi^t(\tau)\Phi(\tau)x^0, x^0 \right\rangle d\tau \\ &= \left\langle \int_0^\infty \Phi^t(\tau)\Phi(\tau)d\tau x^0, x^0 \right\rangle = \langle Sx, x\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

avec

$$S = \int_0^\infty \Phi^t(\tau)\Phi(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}, \ s_{ij} = s_{ji}, \ \ i, j = 1, 2, ..., n.$$

En vertu de la relation (4) l'expression dans l'intégrale (7) converge. De plus il est aisé de voir que la fonction $V(x)$ est bien définie pour tout $x \in R^n$, aussi grâce à l'unicité de la solution du système (3), on a

$$V(x) \geq 0, \ \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} V(x) > 0 \text{ si } x \neq 0 \\ V(x) = 0 \text{ si } x = 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} V(\varphi(t,x)) &= \int_0^\infty |\varphi(\tau, \varphi(t,x))|^2 \, d\tau = \int_0^\infty |\varphi(\tau + t, x)|^2 \, d\tau \\ &= \int_t^\infty |\varphi(\sigma, x)|^2 \, d\sigma, \end{aligned}$$

par différentiation, on obtient

$$\left.\frac{dV(\varphi(t,x))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(\int_t^\infty |\varphi(\sigma, x)|^2 \, d\sigma\Big)_{t=0} = -|\varphi(t,x)|^2 = -|x|^2. \tag{9}$$

D'autres part

$$\begin{aligned} \left.\frac{dV(\varphi(t,x))}{dt}\right|_{t=0} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\varphi(t,x))}{\partial x_i} \dot{\varphi}(t,x) \;{}_{t=0} = \langle \operatorname{grad} V(\varphi(t,x)), \dot{\varphi}(t,x) \rangle_{t=0} \\ &= \langle \operatorname{grad} V(\varphi(t,x)), A\varphi(t,x) \rangle_{t=0} = \langle \operatorname{grad} V(x), Ax) \rangle . \end{aligned} \tag{10}$$

De la relation (9) et (10) il découle

$$\langle \operatorname{grad} V(x), Ax \rangle = -|x|^2 . \tag{11}$$

En vertu de (1) et (11), il vient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\dot{x}_i &= \langle \operatorname{grad} V(x), \dot{x}\rangle = \langle \operatorname{grad} V(x), Ax + f(t,x)\rangle \\ &= \langle \operatorname{grad} V(x), Ax\rangle + \langle \operatorname{grad} V(x), f(t,x)\rangle \\ &= -\left|x\right|^2 + \langle \operatorname{grad} V(x), f(t,x)\rangle . \qquad (12)\end{aligned}$$

Aussi la relation (7) nous donne

$$\operatorname{grad} V(x) = 2Sx. \qquad (13)$$

Pour $\mid x \mid \leq h_\epsilon < h$, avec $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, de la relation (2), on obtient

$$\left|f(t,x)\right| < \epsilon \left|x\right| . \qquad (14)$$

Après utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et les relations (13) et (14), il découle

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\dot{x}_i &\leq -\left|x\right|^2 + \left|\langle \operatorname{grad} V(x), f(t,x)\rangle\right| \\ &\leq -\left|x\right|^2 + 2\left\|S\right\|\left|x\right| .\epsilon \left|x\right| \\ &< -\left|x\right|^2 (1 - 2\epsilon \left\|S\right\|) < -\frac{1}{2}\left|x\right|^2 < 0, \qquad (15)\end{aligned}$$

Pourvu que l'on a

$$0 < \epsilon < \frac{1}{4\left\|S\right\|} \text{ et } 0 < \left|x\right| < h_\epsilon.$$

D'où la relation

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\dot{x}_i \leq -W(x), \text{ avec } W(x) = \frac{1}{2}\left|x\right|^2,$$

ce qui donne la stabilité asymptotique de la solution nulle et cela d'après le lemme de Liapounov

Remarque

Si au moins une des valeurs propres de la matrice A possède une partie réelle positive, la solution nulle du système (1) est instable.

Exemple1
Soit la système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 \sin t, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$$

Etudier la stabilité de la fonction nulle.

Solution
Le système s'écrit

$$\dot{X} = AX + f(X),$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(X) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \sin t \\ -y^2 \end{pmatrix},$$

la fonction $f(X)$ vérifie la condition (2) et la matrice A admet les valeurs propres

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i,$$

les parties réelles des valeurs propres étant positives, alors la solution nulle n'est pas stable.

Exemple2
Soit la système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8 \sin y, \\ \dot{y} = 2 - 3y - \exp x - \cos y. \end{cases}$$

Etudier la stabilité de la fonction nulle.

Solution
Développons les fonctions $\exp x$, $\sin y$ et $\cos y$ suivant la formule de Taylor afin d'obtenir le système avec une partie linéaire aux seconds membres,

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + f_1(x, y), \\ \dot{y} = -x - 3y + f_2(x, y). \end{cases}$$

Le système devient

$$\dot{X} = AX + f(X),$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \; f(X) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix},$$

la fonction $f(X)$ vérifie la condition (2) et la matrice A admet les valeurs propres

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{8}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{8},$$

les parties réelles des valeurs propres étant négatives, alors la solution nulle est asymptotiquement stable.

Exemple3

Soit la système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4+4y} - 2\exp(x+y), \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1-4y), \end{cases} \quad \text{avec } a = C^{te}.$$

Etudier la stabilité de la fonction nulle.

Solution

Développons les fonctions $\sqrt{4+4y}$, $\exp(x+y)$, $\sin ax$ et $\ln(1-4y)$ suivant la formule de Taylor afin d'obtenir le système avec une partie linéaire aux seconds membres,

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + f_1(x,y), \\ \dot{y} = ax - 4y + f_2(x,y). \end{cases}$$

Le système devient

$$\dot{X} = AX + f(X),$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ a & -4 \end{pmatrix}, \; f(X) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix},$$

la fonction $f(X)$ vérifie la condition (2) et la matrice A admet les valeurs propres

$$\lambda_1 = -3 + \sqrt{1-a}, \quad \lambda_2 = -3 - \sqrt{1-a},$$

- Pour $a > 1$, les racines λ_1 et λ_2 sont complexes, dont les parties réelles $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = -3$ sont négatives, d'où la stabilité asymptotique de la solution nulle.

-Pour $-8 < a \leq 1$, les racines λ_1 et λ_2 sont réelles négatives, d'où la stabilité asymptotique de la solution nulle.

-Pour $a < -8$, les racines λ_1 et λ_2 sont réelles positives, d'où l'instabilité de la solution nulle.

-Pour $a = -8$, les racines sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -6$, on ne peut rien dire sur la question de la stabilité.

Exemple4

Soit la système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 4y, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$$

Etudier la stabilité de la fonction nulle.

Solution

Le système s'écrit

$$\dot{X} = AX + f(X),$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \ f(X) = \begin{pmatrix} -x^3 \\ -y^3 \end{pmatrix},$$

la fonction $f(X)$ vérifie la condition (2) et la matrice A admet les valeurs propres

$$\lambda_1 = +2i\sqrt{8}, \quad \lambda_2 = -2i\sqrt{8},$$

les parties réelles des valeurs propres ne sont pas négatives, alors les conditions du théorème de Liapounov ne sont pas remplies, posons

$$V(x,y) = 3x^2 + 4y^2.$$

Dérivons la fonction $V(x,y)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\dot{y} &= 6x(-4y - x^3) + 8y(3x - y^3) \\ &= -(6x^4 + 8y^4) \leq 0. \end{aligned}$$

Pour la fonction $W(x,y)$ donnée par

$$W(x,y) = 6x^4 + 8y^4,$$

on remarque toutes les conditions du lemme de Liapounov sont remplies, ce qui implique la stabilité asymptotique de la solution nulle.

Stabilité des solutions périodiques

Soit le système d'équations différentielles

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

où $A(t)$ est une matrice carrée d'ordre n à éléments continus et périodiques de période ω et soit $\Phi(t)$ la matrice fondamentale du système (1), avec la relation $\Phi(0) = I$ la matrice de l'unité.

Matrice de la monodromie

On appelle matrice de la monodromie la matrice $\Phi(\omega)$ où $\Phi(t)$ est la matrice fondamentale du système d'équations (1).

Multiplicateurs d'un système

On appelle multiplicateurs d'un système d'équations différentielles, les valeurs propres da la matrice de la monodromie $\Phi(\omega)$.

Théorème3

Pour que la solution nulle du système d'équations (1) *soit asymptotiquement stable il faut et il suffit que chaque multiplicateur* $\lambda_j,\ j = 1,2,...,n,$ *du système* (1),*a le module inférieur à l'unité.*

$$\lambda_j \text{ multiplicateur du système (1)} \Rightarrow \mid \lambda_j \mid < 1, \quad j = 1,2,...,n.$$

Démonstration

Sachant que la matrice fondamentale $\Phi(t)$ du système (1) est donnée par

$$\Phi(t) = Y(t)\exp(\Lambda t),$$

où $Y(t)$ est une matrice carrée d'ordre n à éléments continus et périodiques de période ω avec $Y(0) = I$ où I désigne la matrice unité, Λ est une matrice d'ordre n à éléments constants.

Appliquons le changement de variable

$$x = Y(t)y, \tag{2}$$

au système d'équations (1), on obtient

$$\dot{y} = \Lambda y. \tag{3}$$

Il est bien connu que si $\lambda_j,\ j = 1, 2, ..., n$, sont des valeurs propres d'une matrice A non dégénérée, alors $\ln \lambda_j,\ j = 1, 2, ..., n$, sont des valeurs propres da la matrice $\ln A$.

En vertu da la relation

$$\Lambda = \frac{1}{\omega} \ln \Phi(\omega),$$

les valeurs propres de la matrice Λ sont données par

$$\mu_j = \frac{1}{\omega} \ln \lambda_j,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Alors, on a

$$\mu_j = \frac{1}{\omega}(\ln |\lambda_j| + i \arg \lambda_j + 2k\pi, \quad j = 1, 2, ..., n. \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

D'où la relation

$$|\lambda_j| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \mu_j < 0, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

qui achève la démonstration.

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures Dunod Paris 1960.

[5] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.