§11. Stabilité des solutions des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants

Soit le système linéaire homogène suivant

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n d'éléments constants, admettant comme valeurs propres

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k, \quad k = 1, 2, ..., m \ \text{ avec } m \leq n.$$

Lemme 1

Si toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles négatives, alors pour chaque solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (1), *il existe deux constantes α et L telles que*

$$|\varphi(t)| \leq L \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration

Il est bien connu que chaque solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (1) s'écrit sous la forme

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} q^k(t) \exp(\lambda_k t), \tag{2}$$

avec $q^k(t)$ le vecteur donné par

$$q^k(t) = (q_1^k(t), q_2^k(t), ..., q_n^k(t))^t,$$

où chaque composante $q_j^k(t), \quad j = 1, 2, ..., n; \quad k = 1, 2, ..., m$, représente un polynôme de la variable indépendante t.

Le fait que l'on a les parties réelles des valeurs propres négatives

$$\operatorname{Re} \lambda_k = \mu_k < 0, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

il existe alors un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\operatorname{Re} \lambda_k = \mu_k < -\alpha < 0,$$

d'où

$$\mu_k + \alpha < 0. \tag{3}$$

Il est clair que de la formule (2), on obtient

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t)| &\leq \sum_{k=1}^{m} \left|q^k(t)\right| |\exp(\lambda_k t)| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left|q^k(t)\right| |\exp((\mu_k + i\nu_k)t)| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left|q^k(t)\right| \exp(\mu_k t).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Multipliant les deux membres de la relation (4) par l'expression $\exp(\alpha t)$, pour obtenir

$$
|\varphi(t)\exp(\alpha t)| \leq \sum_{k=1}^{m} \left|q^k(t)\right| \exp((\mu_k + \alpha)t). \tag{5}
$$

En vertu de (3), on a

$$
\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left|q^k(t)\right| \exp((\mu_k + \alpha)t) = 0. \tag{6}
$$

Il en découle que la fonction

$$
\sum_{k=1}^{m} \left|q^k(t)\right| \exp((\mu_k + \alpha)t)
$$

est bornée pour tout $t \geq 0$. Autrement dit, il existe un nombre $L > 0$ tel que

$$
\sum_{k=1}^{m} \left|q^k(t)\right| \exp((\mu_k + \alpha)t) \leq L, \quad \forall\ t \geq 0.
$$

D'où en vertu de (5), on a

$$
|\varphi(t)\exp(\alpha t)| \leq L, \quad \forall\ t \geq 0,
$$

ce qui donne le résultat voulu

$$
|\varphi(t)| \leq L\ \exp(-\alpha t), \quad \forall\ t \geq 0.
$$

Lemme 2

Si toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles négatives, alors pour chaque solution $x = \varphi(t, x^0)$ de l'équation (1), vérifiant les conditions initiales $\varphi(0, x) = x^0$, il existe des constantes α et M telles que

$$\left|\varphi(t, x^0)\right| \leq M \ \left|x^0\right| \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration

Il est bien connu que pour chaque solution $x^i = \varphi^i(t)$ de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales

$$\varphi^i(0) = e^i, \quad \text{avec } \ e^i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_i n), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j, \end{cases}$$

la fonction

$$x = \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t) x_i^0,$$

est une solution de l'équation (1), vérifiant la condition initiale

$$x = x^0 \quad \text{pour} \ \ t = 0,$$

et en vertu du théorème d'unicité, on obtient

$$\varphi(t, x^0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(t) x_i^0. \tag{7}$$

D'après le lemme1, il existe des constantes $L_i > 0$, et $\alpha > 0$ telles que

$$\left|\varphi^i(t)\right| \leq L_i \exp(-\alpha t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Posons

$$L = \max\{L_1, L_2, ..., L_n\},$$

ce qui implique pour tout $t \geq 0$, on a

$$\left|\varphi^i(t)\right| \leq L \ \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

De la relation (7), il vient

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(t,x^0)\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left|\varphi^i(t)\right| \left|x_i^0\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} L \ \exp(-\alpha t) \left|x^0\right| \\
&= nL \left|x^0\right| \exp(-\alpha t).
\end{aligned}$$

Posons $M = nL$, on aura le résultat voulu

$$\left|\varphi(t,x^0)\right| \leq M \left|x^0\right| \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1

Soit $x = \varphi(t)$ une solution de l'équation (1), *alors pour que la solution nulle $\psi(t) = 0$ de l'équation* (1) *soit asymptotiquement stable il faut et il suffit que toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles négatives.*

Démonstration

• *Condition suffisante*

Soit $x = \phi(t) = \varphi(t,x^0)$ une solution de l'équation (1) vérifiant

$$x^0 = \phi(0) = \varphi(0,x^0)$$

il existe alors d'après le lemme 2, deux constantes positives $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$|\phi(t)| = \left|\varphi(t,x^0)\right| \leq M \left|x^0\right| \exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ un réel donné, on prend $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$, ce qui donne la relation

$$\left|x^0\right| < \delta, \quad \forall t \geq 0,$$

implique

$$|\phi(t)| = \left|\varphi(t,x^0)\right| < M.\frac{\epsilon}{M} \exp(-\alpha t) \leq \epsilon$$

D'où la stabilité de la fonction nulle.

Etant donné que l'on a

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-\alpha t) = 0,$$

alors il est aisé de voir que

$$\lim_{t\to\infty} |\phi(t)| = 0.$$

D'où la stabilité asymptotique de la solution nulle.

• *Condition nécessaire*

En effet, si on prend pour une certaine valeur propre λ_i sa partie réelle $\operatorname{Re}\lambda_i = \mu_i \geq 0$ et son vecteur propre correspondant $\gamma^i = p^i + iq^i$, alors la fonction

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}\left(\gamma^i \exp(\lambda_i t)\right) = \operatorname{Re}\left((p^i + iq^i)\exp(\mu_i + i\nu_i)t\right) \\ &= (p^i \cos\nu_1 t) - q^i \sin\nu_i t)\exp(\mu_i t), \end{aligned}$$

est une solution de l'équation (1). D'où

$$\lim_{t\to\infty} x = \lim_{t\to\infty} |\phi(t)| \neq 0.$$

D'où l'instabilité asymptotique de la solution nulle.

Aussi il est évident que les solutions de la forme

$$x = \phi(t) = C\operatorname{Re}(\gamma^i \exp(\lambda_i t)), \quad \text{avec } C \neq 0. \tag{8}$$

Si la variable indépendante $t = 0$ et la constante $|C|$ est suffisamment petite alors les solutions (8), $x = \phi(t)$ sont proches de la solution nulle, par contre ces solutions $x = \phi(t)$ ne tendent pas vers la fonction nulle lorsque la variable indépendante t croît indéfiniment vers l'infini.

D'où la contradiction avec la stabilité asymptotique.

Remarque 1

Si la solution nulle de l'équation (1) est stable, alors les parties réelles de toutes les valeurs propres de la matrice A sont non positives.

Remarque 2

La solution nulle est stable si les parties réelles des valeurs propres $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0,\ i = 1, 2, ..., m$, ou encore si $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ implique que λ_j est une racine simple.

Remarque 3

La solution nulle est instable si au moins une des valeurs propres λ_j de la matrice A possède la partie réelle positive.

Remarque 4

Pour l'étude du signe des parties réelles des valeurs propres, il faut étudier les conditions algébriques de toutes les parties réelles des racines de l'équation

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad \text{avec } a_0 > 0, \tag{9}$$

à coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ constants.

Théorème (Routh-Horowitz)

Pour que toutes les parties réelles des racines de l'équation (9) *soient négatives, il faut et il suffit que tous les mineurs principaux diagonaux de la matrice de Horowitz*

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & \cdots \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

soient positifs. Autrement dit les déterminants mineurs $\Delta_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$

Remarque 5

Mettons les nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ sur la diagonale de la matrice H et appliquons la règle que l'indice de chaque nombre dans chaque ligne est inférieur à celui qui le précède. Les nombres a_i d'indice $i > n$ ou $i < 0$ sont remplacés par des zéros.

Les mineurs principaux diagonaux de la matrice de Horowitz H sont

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, ...,\ \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}. \tag{10}$$

Théorème (Lionnard-Chipard)

Pour que toutes les parties réelles des racines de l'équation (9) *soient négatives, il faut et il suffit que tous les éléments de la matrice* H *de Horowitz* *soient positifs* $a_i > 0$ *et que les mineurs*

$$\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0, ..., ...$$

où les Δ_i *sont les mêmes que ceux dans* (10).

Remarque 6

Les conditions du théorème de Lionnard-Chipard sont équivalentes à celles du théorème de Routh-Horowitz, mais plus commodes car elle contiennent moins de déterminants.

Exemple 1

Soit le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = ax_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 & = x_1 - x_2, \end{cases}$$

trouver les valeurs du paramètre a pour que la solution nulle soit asymptotiquement stable.

Solution

Cherchons l'équation caractéristique $\Delta(\lambda)$ de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (1-a)\lambda + (2-a) = 0.$$

D'où la matrice H est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix},$$

étant donné que

$$\Delta(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

avec

$$\Delta_1 = 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1,$$

et

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 2-a \end{vmatrix} = (1-a)(2-a) > 0 \Rightarrow a < 1 \text{ et } \ a > 2.$$

D'où la valeur $a < 1$ donnent la positivité de tous les mineurs et par conséquent toutes les racines de l'équation caractéristique ont les parties réelles négatives ce qui donne la stabilité asymptotique de la solution nulle.

Exemple 2

Soit le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 + x_2 + 6x_3 \\ \dot{x}_3 &= 8x_1 - 3x_2 - 9x_3, \end{cases}$$

étudier la stabilité asymptotique de la solution nulle.

Solution

Cherchons l'équation caractéristique $\Delta(\lambda)$ de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -6 & 1 & 6 \\ 8 & -3 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -5 \\ -6 & 1-\lambda & 6 \\ 8 & -3 & -9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2 = 0.$$

D'où la matrice H est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

étant donné que

$$\Delta(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

avec

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 36.$$

Les mineurs $\Delta_i > 0$ sont positifs, alors toutes les racines de l'équation caractéristique ont les parties réelles négatives. D'où la stabilité asymptotique de la solution nulle.

Exemple 3

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 \\ \dot{x}_3 = ax_1 + 2x_2 - x_3, \end{cases}$$

chercher les valeurs du paramètre a pour que la solution nulle soit asymptotiquement stable.

Solution

Cherchons l'équation caractéristique $\Delta(\lambda)$ de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ a & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - a\lambda + 6 = 0.$$

D'où la matrice H est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

étant donné que

$$\Delta(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

avec

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -a \end{vmatrix} = -a - 6 > 0 \Rightarrow a < -6.$$

Les mineurs $\Delta_1 = 1 > 0$ et $\Delta_2 = -a - 6$ sont positifs si $a < -6$, uniquement dans ce cas que les racines de l'équation caractéristique auront les parties réelles négatives. D'où la stabilité asymptotique de la solution nulle.

Exemple 4

Trouver les paramètres a et b pour lesquelles les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + b = 0 \tag{11}$$

ont les parties réelles négatives.

Solution
La matrice H est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & 2 & 0 \\ 0 & b & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

Selon les conditions de Lionnard-Chipard, on doit avoir tous les éléments a_i de la matrice H positifs, en particulier les éléments a et b de la matrice H sont positifs, de plus

$$\Delta_{4-1} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix} = 6a - 4b - 9 > 0, \text{ et } \Delta_{4-3} = \Delta_1 = 2 > 0.$$

D'où les paramètres a et b doivent vérifiées les conditions

$$b > 0 \text{ et } a > \frac{4b+9}{6},$$

pour que les racines de l'équation caractéristique (11) admettent des parties réelles négatives.

Exemple 5
Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2, . \end{cases}$$

trouver les valeurs du paramètre a pour que la solution nulle soit asymptotiquement stable.

Solution
Cherchons l'équation caractéristique $\Delta(\lambda)$ de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, la solution nulle n'est pas stable du fait que l'on a $\lambda_1 = 2 > 0$.

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures Dunod Paris 1960.

[5] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.