§10. Stabilité des Solutions des Equations

Stabilité de Liapounov d'une solution

Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

Une solution $x = \psi(t)$ de l'équation (1) est dite stable selon Liapounov si pour toute solution $x = \varphi(t)$, on a la relation suivante

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \geq t_0,\ \text{on a} \quad |\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \psi(t)| < \epsilon. \tag{2}$$

Remarque 1

Si pour un certain $\epsilon > 0$ donné, un tel δ n'existe pas, alors la solution $x = \psi(t)$ est dite instable.

Stabilité asymptotique d'une solution

Une solution $x = \psi(t)$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable au sens de Liapounov. De plus, on a

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0 \tag{3}$$

Remarque 2

Pour l'étude de la stabilité de la solution $x = \psi(t)$ de l'équation (1), on se ramène souvent à étudier la stabilité de la solution nulle $y = 0$ pour une autre équation déduite de l'équation (1) en substituant la fonction cherchée $x = \psi(t) + y$.

Exemple 1

Soit l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 1, & x \in \mathbb{R}, \\ t_0 = 0. \end{cases}$$

Montrer que la solution $x = \psi(t) = 1$ est stable.

Solution

En effet, avec la condition initiale

$$x(0) = \varphi(0) = x^0,$$

la solution $x = \varphi(t)$ de l'équation différentielle est donnée par

$$x = \varphi(t) = (x^0 - 1)\exp(-t) + 1.$$

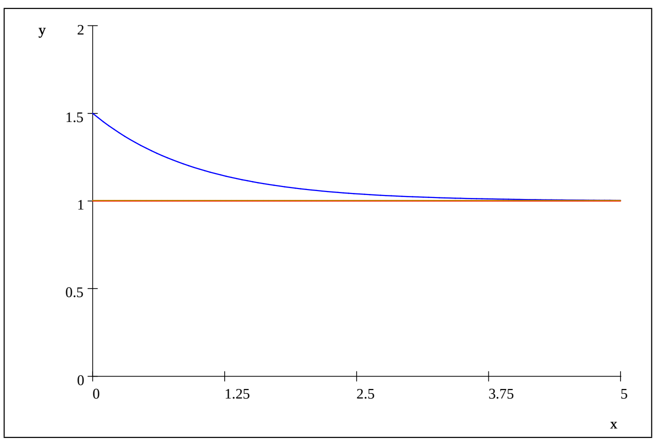
D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| = \left|x^0 - 1\right| < \delta,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &= \left|(x^0 - 1)\exp(-t)\right| \\ &\leq \left|x^0 - 1\right| \\ &= |\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 = 0. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta = \epsilon$. D'où la stabilité de la solution $\psi(t) = 1$.



$x = \psi(t) = 1$ et $x = \varphi(t) = 0.5\exp(-t) + 1$

Exemple 2
Soit le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1, \quad t_0 = 0, \end{cases}$$

montrer que la solution nulle $x_1 = \psi_1(t) = 0$ et $x_2 = \psi_2(t) = 0$ est stable.

Solution

En effet, avec les conditions initiales

$$x_1(0) = \varphi_1(0) = x_1^0 \;\text{ et }\; x_2(0) = \varphi_2(0) = x_2^0,$$

la solution $x_1 = \varphi_1(t)$ et $x_2 = \varphi_2(t)$ du système d'équations différentielles est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) = x_1^0 \cos t + x_2^0 \sin t, \\ x_2 &= \varphi_2(t) = -x_1^0 \sin t + x_2^0 \cos t. \end{aligned}$$

D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| &= |\varphi_1(t)| \\ &= \left|x_1^0 \cos t + x_2^0 \sin t\right| \\ &\leq \left|x_1^0\right| + \left|x_2^0\right| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| &= |\varphi_2(t)| \\ &= \left|-x_1^0 \sin t + x_2^0 \cos t\right| \\ &\leq \left|x_1^0\right| + \left|x_2^0\right| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 = 0. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta = \epsilon$. D'où la stabilité de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t) = 0$ et $x_2 = \psi_2(t) = 0$.

Exemple 3

Soit le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2, \quad t_0 = 0, \end{cases}$$

montrer que la solution nulle $x_1 = \psi_1(t) = 0$ et $x_2 = \psi_2(t) = 0$ est instable.

Solution

En effet, avec les conditions initiales

$$x_1(0) = \varphi_1(0) = x_1^0 \quad \text{et} \quad x_2(0) = \varphi_2(0) = x_2^0,$$

la solution $x_1 = \varphi_1(t)$ et $x_2 = \varphi_2(t)$ du système d'équations différentielles est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) = x_1^0 \exp t, \\ x_2 &= \varphi_2(t) = x_2^0 \exp(-t). \end{aligned}$$

D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on ne peut pas trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0.$$

Autrement dit, la quantité $|\varphi_1 t)|$ peut prendre une valeur assez grande lorsque t croît, étant donné que l'on a

$$\lim_{t \to \infty} \exp t = \infty.$$

D'où a solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$ n'est pas stable.

Exemple 4

Soit le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2, \quad t_0 = 0, \end{cases}$$

montrer que la solution nulle $x_1 = \psi_1(t) = 0$ et $x_2 = \psi_2(t) = 0$ est asymptotiquement stable.

Solution

En effet, avec les conditions initiales

$$x_1(0) = \varphi_1(0) = x_1^0 \text{ et } x_2(0) = \varphi_2(0) = x_2^0,$$

la solution $x_1 = \varphi_1(t)$ et $x_2 = \varphi_2(t)$ du système d'équations différentielles est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) = x_1^0 \exp(-t), \\ x_2 &= \varphi_2(t) = x_2^0 \exp(-t). \end{aligned}$$

D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| &= |\varphi_1(t)| \\ &= \left|x_1^0 \exp(-t)\right| \\ &\leq \left|x_1^0\right| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| &= |\varphi_2(t)| \\ &= \left|x_2^0 \exp(-t)\right| \\ &\leq \left|x_2^0\right| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 = 0. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\delta = \epsilon$. D'où la stabilité de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| &= \lim_{t \to \infty} |\varphi_1(t)| \\ &= \lim_{t \to \infty} \left|x_1^0 \exp(-t)\right| = 0, \quad \forall\, x_1^0 \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| &= \lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t)| \\
&= \lim_{t\to\infty} \left|x_2^0 \exp(-t)\right| = 0, \quad \forall\, x_2^0.
\end{aligned}
$$

D'où la fonction nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$ est asymptotiquement stable.

Exemple 5
Soit le système d'équations différentielles suivant

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\
\dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b \neq 0.
\end{cases}
$$

Donner les conditions que doivent satisfaire les coefficients pour que la solution nulle

$$x_1 = \psi_1(t) = 0 \ \text{ et } x_2 = \psi_2(t) = 0$$

soit stable ou asymptotiquement stable.

Solution
En effet, dérivant la première équation pour éliminer x_2, on obtient une équation de second ordre

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= a\dot{x}_1 + b\dot{x}_2 \\
&= a\dot{x}_1 + b(cx_1 + dx_2) \\
&= a\dot{x}_1 + bcx_1 + d(\dot{x}_1 - ax_1).
\end{aligned}
$$

D'où l'équation de second ordre

$$\ddot{x}_1 - (a+d)\dot{x}_1 - (bc - ad)x_1 = 0,$$

avec l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda - (bc - ad) = 0.$$

Soient λ_1 et λ_2 les racines de l'équation caractéristique alors, on a les cas suivants

- *Premier cas*

Les racines λ_1 et λ_2 sont réelles, négatives et distinctes

$$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0, \quad \text{avec} \ \ \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

D'où la solution du système est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= A\exp(\lambda_1 t) + B\exp(\lambda_2 t), \\ x_2 &= \frac{1}{b}[A(\lambda_1 - a)\exp(\lambda_1 t) + B(\lambda_2 - a)\exp(\lambda_2 t)] \end{aligned}$$

Utilisons les conditions initiales données

$$x_1(0) = x_1^0 \ \text{ et } x_2(0) = x_2^0,$$

on obtient la solution du système

$$\begin{aligned} x_1 \equiv \varphi_1(t) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[(ax_1^0 + bx_2^0 - \lambda_2 x_1^0)\exp(\lambda_1 t) \\ &\quad +(\lambda_1 x_1^0 - ax_1^0 - bx_2^0)\exp(\lambda_2 t)] \\ x_2 = \varphi_2(t) &= \frac{1}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}[(ax_1^0 + bx_2^0 - \lambda_2 x_1^0)(\lambda_1 - a)\exp(\lambda_1 t) \\ &\quad +(\lambda_1 x_1^0 - ax_1^0 - bx_2^0)(\lambda_2 - a)\exp(\lambda_2 t)]. \end{aligned}$$

D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon,\ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon,\ \forall t \geq t_0 = 0.$$

D'où la stabilité de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.
De plus, on a

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| = \lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t)| = 0,$$

et
$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| = \lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t)| = 0.$$

D'où la stabilité asymptotique de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.

• *Deuxième cas*

L'une des racines λ_1 est négative, l'autre racine λ_2 est nulle

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

D'où la solution du système est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= A\exp(\lambda_1 t) + B, \\ x_2 &= \frac{1}{b}[A(\lambda_1 - a)\exp(\lambda_1 t) + Ba] \end{aligned}$$

Utilisons les conditions initiales données

$$x_1(0) = x_1^0 \ \text{ et } x_2(0) = x_2^0,$$

on obtient la solution du système

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) = \frac{1}{\lambda_1}[(ax_1^0 + bx_2^0)\exp(\lambda_1 t) + (\lambda_1 x_1^0 - ax_1^0 - bx_2^0)] \\ x_2 &= \varphi_2(t) = \frac{1}{b\lambda_1}[(ax_1^0 + bx_2^0)(\lambda_1 - a)\exp(\lambda_1 t) + (a\lambda_1 x_1^0 - a^2 x_1^0 - abx_2^0)]. \end{aligned}$$

D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0.$$

D'où la stabilité de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.
De plus, si l'expression $(\lambda_2 x_1^0 - a x_1^0 - b x_2^0)$ est non nulle alors, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| &= \lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t)| \neq 0,\\
\lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| &= \lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t)| \neq 0.
\end{aligned}$$

D'où la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$ n'est pas asymptotiquement stable.

- *Troisième cas*

Les racines λ_1 et λ_2 sont égales et négatives

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ avec } \lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0.$$

D'où la solution du système est donnée par

$$\begin{aligned}
x_1 &= (At + B)\exp(\lambda_1 t),\\
x_2 &= \frac{1}{b}[A(\lambda_1 - a)t + Ba]\exp(\lambda_1 t).
\end{aligned}$$

Utilisons les conditions initiales données

$$x_1(0) = x_1^0 \text{ et } x_2(0) = x_2^0,$$

on obtient la solution du système

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t) = [(a x_1^0 + b x_2^0 - \lambda_1 x_1^0)t + x_1^0]\exp(\lambda_1 t)\\
x_2 &= \varphi_2(t) = \frac{1}{b}[(a x_1^0 + b x_2^0 - \lambda_1 x_1^0)(\lambda_1 - a)t + a x_1^0]\exp(\lambda_1 t).
\end{aligned}$$

D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon,\ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon,\ \forall t \geq t_0 = 0.$$

D'où la stabilité de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.

De plus, on a

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| = \lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t)| = 0,$$

et

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| = \lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t)| = 0.$$

D'où la stabilité asymptotique de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.

• *Quatrième cas*

Les racines λ_1 et λ_2 sont égales et nulles

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

D'où la solution du système est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= At + B, \\ x_2 &= \frac{1}{b}[A(\lambda_1 - a)t + Ba]. \end{aligned}$$

Utilisons les conditions initiales données

$$x_1(0) = x_1^0 \text{ et } x_2(0) = x_2^0,$$

on obtient la solution du système

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) = x_1^0 + (ax_1^0 + bx_2^0)t, \\ x_2 &= \varphi_2(t) = \frac{1}{b}[(ax_1^0 + bx_2^0)(1 - at) - ax_1^0]. \end{aligned}$$

D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on ne peut pas trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0.$$

Autrement dit, si l'expression $(ax_1^0 + bx_2^0)$ est non nulle, alors les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ tendent vers l'infini lorsque la variable indépendante t tend vers l'infini.

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi_1(t)| = |\varphi_2(t)| = \infty.$$

D'où la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$ n'est pas stable.

- *Cinquième cas*

L'une des racines λ_1 ou λ_2 est positive

$$\lambda_1 > 0,$$

D'où la solution du système est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= A\exp(\lambda_1 t) + B\exp(\lambda_2 t), \\ x_2 &= \frac{1}{b}[A(\lambda_1 - a)\exp(\lambda_1 t) + B(\lambda_2 - a)\exp(\lambda_2 t)] \end{aligned}$$

Utilisons les conditions initiales données

$$x_1(0) = x_1^0 \ \text{ et } x_2(0) = x_2^0,$$

on obtient la solution du système

$$\begin{aligned} x_1 = \varphi_1(t) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[(ax_1^0 + bx_2^0 - \lambda_2 x_1^0)\exp(\lambda_1 t) \\ &\quad +(\lambda_1 x_1^0 - ax_1^0 - bx_2^0)\exp(\lambda_2 t)] \\ x_2 = \varphi_2(t) &= \frac{1}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}[(ax_1^0 + bx_2^0 - \lambda_2 x_1^0)(\lambda_1 - a)\exp(\lambda_1 t) \\ &\quad +(\lambda_1 x_1^0 - ax_1^0 - bx_2^0)(\lambda_2 - a)\exp(\lambda_2 t)]. \end{aligned}$$

D'où si l'on prend pour $t = t_0 = 0$ la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on ne peut pas trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0.$$

Autrement dit, si l'expression $(ax_1^0 + bx_2^0 - \lambda_2 x_1^0)$ est non nulle, alors les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ tendent vers l'infini lorsque la variable indépendante t tend vers l'infini.

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t)| = |\varphi_2(t)| = \infty.$$

D'où la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$ n'est pas stable.

• *Sixième cas*

Les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique sont complexes et la partie réelle est négative

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \ \text{avec } \alpha < 0.$$

D'où la solution du système est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= A\exp(\alpha t)[A\cos\beta t + B\sin\beta t], \\ x_2 &= \frac{1}{b}[A(\lambda_1 - a)\exp(\lambda_1 t) + B(\lambda_2 - a)\exp(\lambda_2 t)] \end{aligned}$$

Utilisons les conditions initiales données

$$x_1(0) = x_1^0 \ \text{ et } x_2(0) = x_2^0,$$

on obtient la solution du système

La solution du système est

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t) = [x_1^0 \cos\beta t + \frac{1}{\beta}(\alpha x_1^0 - a x_1^0 - b x_2^0)\sin\beta t]\exp(\alpha t),\\
x_2 &= \varphi_2(t) = \frac{1}{b}[b x_2^0 \cos\beta t + \frac{\alpha - a}{\beta}(\alpha x_1^0 - a x_1^0 - b x_2^0) - \beta x_1^0]\exp(\alpha t).
\end{aligned}
$$

Pour la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon,\ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon,\ \forall t \geq t_0 = 0.$$

D'où la stabilité de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.
De plus, on a

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| = \lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t)| = 0,$$

et

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| = \lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t)| = 0.$$

D'où la stabilité asymptotique de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.

• *Septième cas*

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes et imaginaire pures

$$\lambda_1 = i\beta,\quad \lambda_2 = -i\beta,\ \text{avec}\ \ \beta \neq 0.$$

La solution du système est

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t) = x_1^0 \cos\beta t + \frac{1}{\beta}(a x_1^0 + b x_2^0)\sin\beta t,\\
x_2 &= \varphi_2(t) = b x_2^0 \cos\beta t - \frac{1}{\beta b}(a^2 x_1^0 + \beta^2 x_1^0 + ab x_2^0)\sin\beta t.
\end{aligned}
$$

Il est à remarquer que la solution $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont des fonctions périodiques de la variable indépendante t.

Pour la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0.$$

D'où la stabilité de la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| &= \lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t)| \neq 0, \\ \lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| &= \lim_{t\to\infty} |\varphi_2(t)| \neq 0. \end{aligned}$$

D'où la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$ n'est pas asymptotiquement stable.

• *Huitième cas*

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes dont la partie réelle est positive

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

Il est à remarquer que la solution $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ du système est la même que la solution (6).

Pour la relation

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| = \left|x_1^0\right| < \delta,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| = \left|x_2^0\right| < \delta,$$

Il en résulte que pour tout $\epsilon > 0$, on ne peut pas trouver un $\delta > 0$, tel que

$$|\varphi_1(t_0) - \psi_1(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0,$$

et

$$|\varphi_2(t_0) - \psi_2(t_0)| < \delta \Rightarrow |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0 = 0.$$

car les quantités $\mid \varphi_1 t) \mid$ et $\mid \varphi_2(t) \mid$ peuvent prendre des valeurs assez grandes lorsque t croît, étant donné que l'on a

$$\lim_{t \to \infty} \exp(\alpha t) = \infty.$$

D'où la solution nulle $x_1 = \psi_1(t)$ et $x_2 = \psi_2(t)$ n'est pas stable.

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[5] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.