Limites et Continuité

Limites des Fonctions

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On dit que la fonction f tend vers b lorsque x tend vers a, où a est un point d'accumulation de l'ouvert U et $b \in \mathbb{R}^m$ et on écrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in U, \ 0 <\| x = a \|< \delta \Rightarrow\| f(x) - b \|< \varepsilon$$

Remarque

La fonction f possède au plus une limite au point a.

Propriétés

Soient f et g deux fonction définies sur le même ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ telles que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \ \text{ et } \lim_{x \to a} g(x) = c,$$

alors, on a

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$
- $\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda b$
- $\lim_{x \to a} < f(x) + g(x) >=< b, c >$

Continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On dit que la fonction f est continue au point a si, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in U, \ \ \| x = a \|< \delta \Rightarrow\| f(x) - f(a) \|< \varepsilon.$$

Autrement dit si, on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Remarque

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On dit que la fonction f est continue sur l'ensemble U si f est continue en chaque point de U.

Théorème 1

La fonction projection ou "projecteur" notée P_i définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$P_i(x) = P_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$$

est continue

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, il est aisé de voir que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \mid x_i - a_i \mid = \mid P_i(x) - P_i(a) \mid \leq \parallel x - a \parallel,$$

alors il suffit de prendre $\varepsilon = \delta$.

Théorème 2

Soient f et g deux fonctions telles que

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ et } g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, \text{ alors}$$

si f est continue en $a \in \mathbb{R}^n$ et g est continue en $f(a) \in \mathbb{R}^m$ alors, $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, la fonction g étant continue au point $f(a)$, il existe alors un $\eta > 0$, tel que

$$\parallel g(y) - g(f(a)) \parallel < \varepsilon \text{ si } \parallel y - f(a) \parallel < \eta.$$

La fonction f est continue au point a, il existe un $\delta > 0$, tel que

$$\parallel f(x) - f(a) \parallel < \eta \text{ si } \parallel x - a \parallel < \delta.$$

D'où

$$\parallel g(y) - g(f(a)) \parallel < \varepsilon \text{ si } \parallel x - a \parallel < \delta.$$

Théorème 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

$$f : (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)),$$

la fonction f est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si les fonctions composantes $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ soient continues au point a.

Démonstration
$(\Rightarrow)$
Les fonctions coordonnées f_i ne sont autres que la composée de la fonction projection continue P_i et la fonction continue f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{P_i} \mathbb{R}$
$P_i \circ f(x) = P_i \circ f(x_1, x_2, ..., x_n) = P_i(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) = f_i(x)$

$(\Leftarrow)$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i > 0$, tel que

$$\| x - a \| < \delta_i \Rightarrow | f_i(x) - f_i(a) | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$, alors

$$\| x - a \| < \delta \Rightarrow | f_i(x) - f_i(a) |^2 < \frac{\varepsilon^2}{m},$$

d'où
$$\sum_{i=1}^{m} | f_i(x) - f_i(a) |^2 < m\frac{\varepsilon^2}{m} \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \varepsilon.$$

Théorème 4
Toute application linéaire f définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ *est continue.*

Démonstration
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$et soit $\{e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^n$, alors les vecteurs x et x_0 de $\mathbb{R}^n$ s'écrivent

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 e_i \text{ et } x_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_1 e_i.$$

Pour démontrer la continuité de l'application linéaire f il faut avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\| &\quad f(x)-f(x_0)\| = \| \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)f(e_i)\| \leq \\
| &\quad \alpha_1-\beta_1 | \| f(e_1)\| + | \alpha_2-\beta_2 | \| f(e_2)\| +...+ | \alpha_n-\beta_n | \| f(e_n)\| \leq \\
| &\quad \alpha_1-\beta_1 | A+ | \alpha_2-\beta_2 | A + ...+ | \alpha_n-\beta_n | A \\
= &\quad (| \alpha_1-\beta_1 | + | \alpha_2-\beta_2 | +...+ | \alpha_n-\beta_n |)A
\end{aligned}$$

où

$$A = \max\{\| f(e_1)\|, \| f(e_2)\|, ..., \| f(e_n)\|\}.$$

Il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{nA}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\| &\quad x-x_0 \| < \delta \Rightarrow \| x-x_0 \| = \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_2-\beta_2)^2+...+(\alpha_n-\beta_n)^2} \\
\geq &\quad \sqrt{(\alpha_i-\beta_i)^2} = | \alpha_i-\beta_i | < \delta = \frac{\varepsilon}{nA}, \ \forall i = 1,2,...,n.
\end{aligned}$$

D'où

$$\| f(x)-f(x_0)\| \leq (| \alpha_1-\beta_1 | + | \alpha_2-\beta_2 | +...+ | \alpha_n-\beta_n |)A < A(n\frac{\varepsilon}{nA}) = \varepsilon$$

Théorème 5

Soient f et g deux fonctions numériques définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, continues au point $a \in \mathbb{R}^n$. Alors les fonctions numériques $f+g$ et fg sont continues au point $a \in \mathbb{R}^n$. Si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$.

Corollaire

Toute fonction polynomiale à n variables réelles est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Soit $p(x,y,z)$ le polynôme défini sur $\mathbb{R}^3$par

$$p(x,y,z) = x^3y^2z + z^2y + xy$$

est continu sur $\mathbb{R}^3$

Exercices

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.Trouver la limite de la fonction $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}; \qquad f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{\mid x \mid - \mid y \mid}{x^2+y^2}; \qquad f(x,y) = \frac{x\sin x + y}{x+y}$$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.Trouver la limite de la fonction $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers (∞,∞)

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}; \qquad f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; \qquad f(x,y) = \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

Exercice 3

Etudier suivant les valeurs de l'entier $n \in \mathbb{N}$, la limite de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^n}{x^2+y^2}; \qquad f(x,y) = \frac{x^n}{x^3+y^2}$$

Exercice 4

Etudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions numériques suivantes

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue au point $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les fonctions partielles f_1 et f_2 définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = f(x, a_2); \qquad f_2(y) = f(a_1, y),$$

sont continues respectivement aux points a_1 et a_2.

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que les deux applications partielles f_1 et f_2 sont continues au points 0, et que la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$. que peut-on conclure.