

§1. Limites et Continuité des fonctions

Limites des Fonctions

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^m . On dit que la fonction f tend vers b lorsque x tend vers a , où a est un point d'accumulation de l'ouvert U et $b \in \mathbb{R}^m$ et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$
$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

Remarque

La fonction f possède au plus une limite au point a .

Propriétés

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ouvert U de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m telles que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c,$$

alors, on a

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$
- $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda b$
- $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x) + g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$

Continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^m . On dit que la fonction f est continue au point $a \in U$ si, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Autrement dit si, on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^m , on dit que la fonction f est continue sur l'ensemble U si f est continue en chaque point de U .

Fonction projection

La fonction projection ou (projecteur) notée P_i définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} par

$$P_i(x) = P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

est continue

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, il est aisé de voir que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |x_i - a_i| = |P_i(x) - P_i(a)| \leq \|x - a\|,$$

alors il suffit de prendre $\varepsilon = \delta$.

Composition des fonctions

Soient f et g deux fonctions telles que

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ et } g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p, \text{ alors}$$

si f est continue en $a \in \mathbb{R}^n$ et g est continue en $f(a) \in \mathbb{R}^m$ alors, $g \circ f$ est continue en a .

Soit $\varepsilon > 0$, la fonction g étant continue au point $f(a)$, il existe alors un $\eta > 0$, tel que

$$\|g(y) - g(f(a))\| < \varepsilon \text{ si } \|y - f(a)\| < \eta.$$

La fonction f est continue au point a , il existe un $\delta > 0$, tel que

$$\|f(x) - f(a)\| < \eta \text{ si } \|x - a\| < \delta.$$

D'où

$$\|g(y) - g(f(a))\| < \varepsilon \text{ si } \|x - a\| < \delta.$$

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)),$$

la fonction f est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si les fonctions composantes $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ soient continues au point a .

Démonstration

- condition nécessaire

Les fonctions coordonnées f_i ne sont autres que la composée de la fonction projection continue P_i et la fonction continue f définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{P_i} & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) & \mapsto & P_i \circ f(x) = f_i(x) \end{array}$$

- condition suffisante

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i > 0$, tel que

$$\|x - a\| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, alors

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{m}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(a)|^2 < m \frac{\varepsilon^2}{m} \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Théorème 2

Toute application linéaire f définie sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m est continue.

Démonstration

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ une base de \mathbb{R}^n , alors les vecteurs x et x_0 de \mathbb{R}^n s'écrivent

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \text{et} \quad x_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i.$$

Pour démontrer la continuité de l'application linéaire f il faut avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) f(e_i) \right\| \\ &\leq |\alpha_1 - \beta_1| \|f(e_1)\| + |\alpha_2 - \beta_2| \|f(e_2)\| + \dots + |\alpha_n - \beta_n| \|f(e_n)\| \\ &\leq |\alpha_1 - \beta_1| A + |\alpha_2 - \beta_2| A + \dots + |\alpha_n - \beta_n| A \\ &= (|\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_2 - \beta_2| + \dots + |\alpha_n - \beta_n|) A, \end{aligned}$$

où

$$A = \max\{\|f(e_1)\|, \|f(e_2)\|, \dots, \|f(e_n)\|\}.$$

Il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{nA}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| < \delta &\Rightarrow \|x - x_0\| = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)^2} \\ &\geq \sqrt{(\alpha_i - \beta_i)^2} = |\alpha_i - \beta_i| < \delta = \frac{\varepsilon}{nA}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

D'où

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq (|\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_2 - \beta_2| + \dots + |\alpha_n - \beta_n|) A < A \left(n \frac{\varepsilon}{nA} \right) = \varepsilon$$

Théorème 3

Soient f et g deux fonctions numériques définies de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , continues au point $a \in \mathbb{R}^n$. Alors les fonctions numériques $f + g$ et fg sont continues au point $a \in \mathbb{R}^n$. Si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 4

Toute fonction polynomiale à n variables réelles est une fonction continue sur \mathbb{R}^n .

Soit $p(x, y, z)$ le polynôme défini sur \mathbb{R}^3 par

$$p(x, y, z) = x^3 y^2 z + z^2 y + xy$$

est continu sur \mathbb{R}^3

Exercices

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ à valeurs dans \mathbb{R} . Trouver la limite de la fonction $f(x, y)$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; & f(x, y) &= \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \\ f(x, y) &= \frac{|x| - |y|}{x^2 + y^2}; & f(x, y) &= \frac{x \sin x + y}{x + y} \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ à valeurs dans \mathbb{R} . Trouver la limite de la fonction $f(x, y)$ quand (x, y) tend vers (∞, ∞)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x - y}{x^2 + y^2}; & f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ f(x, y) &= \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}; & f(x, y) &= \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} \end{aligned}$$

Exercice 3

Etudier suivant les valeurs de l'entier $n \in \mathbb{N}$, la limite de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ à valeurs dans \mathbb{R} .

$$f(x, y) = \frac{(x - y)^n}{x^2 + y^2}; \quad f(x, y) = \frac{x^n}{x^3 + y^2}$$

Exercice 4

Etudier la continuité au point $(0, 0)$ des fonctions numériques suivantes

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} , continue au point $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les fonctions partielles f_1 et f_2 définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$f_1(x) = f(x, a_2); \quad f_2(y) = f(a_1, y),$$

sont continues respectivement aux points a_1 et a_2 .

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ à valeurs dans \mathbb{R} par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que les deux applications partielles f_1 et f_2 sont continues au points 0, et que la fonction f n'est pas continue au point $(0, 0)$. que peut-on conclure.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA

E-mail. mostefanadir@yahoo.fr

Mostefa NADIR