Généralité sur les équations différentielles ordinaires

Rappels et définitions

Il est à remarquer que dans plusieurs applications de la physique mathématique la variable indépendante dont dépendent les fonctions inconnues est toujours le temps t. Les fonctions inconnues seront notées par x, y, z, ...*etc.*

Généralement les dérivées par rapport au temps seront notées par

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \dddot{x} = \frac{d^3x}{dt^3}, \ ....etc. \tag{1}$$

Quand cette représentation est incommode, on désigne l'ordre de la dérivée par un indice supérieur entre parenthèses comme suit

$$x^{(5)} = \frac{d^5x}{dt^5}, \quad x^{(n)} = \frac{d^nx}{dt^n} \tag{2}$$

Equation différentielle

On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante t et la fonction inconnue $x = \varphi(t)$ et ses dérivées $\dot{x}$, $\ddot{x}, ..., x^{(n)}$.

Symboliquement, une équation différentielle est représentée comme suit

$$F(t, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n)}) = 0. \tag{3}$$

Si la fonction $x = \varphi(t)$ est d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle (3) est dite ordinaire.

Ordre de l'équation différentielle

On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans cette équation

Exemples

Equation de Premier ordre

$$\dot{x} + \cos tx^3 + 2t = 0.$$

Equation de second ordre

$$\ddot{x} - t^2\dot{x} + 2x + \lambda = 0.$$

Equation de quatrième ordre

$$x^{(4)} + \ddot{x} + x\sin t + 2 = 0.$$

Equation différentielle de premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{4}$$

Forme normale d'un équation différentielle

On appelle équation différentielle normale toute équation de la forme

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{5}$$

Remarque

L'équation (5) est obtenue implicitement à partir de l'équation (4) résolue par rapport à $\dot{x}$. Bien entendu, la fonction $f(t, x)$ est une fonction donnée de deux variables indépendantes et définie sur un ensemble U.

Solution d'une équation différentielle

On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fonction $x = \varphi(t)$ de la variable indépendante t, définie sur un intervalle $]t_1, t_2[$ et vérifiant identiquement cette équation en tout point de cet intervalle.

L'intervalle $]t_1, t_2[$ est dit intervalle de définition de la solution $x = \varphi(t)$. (Les cas $t_1 = -\infty$, $t_2 = +\infty$ ne sont pas exclus.)

Remarque

Il est à remarquer que la fonction $x = \varphi(t)$ doit posséder une dérivée première pour tout point de l'intervalle $]t_1, t_2[$, aussi le point de coordonnées $(t, \varphi(t))$ doit appartenir à l'ensemble U sur lequel la fonction $f(t, x)$ est définie.

Conditions initiales

Soit l'équation différentielle (5)

$$\dot{x} = f(t, x),$$

avec la solution $x = \varphi(t)$ satisfait la condition

$$\varphi(t_0) = x^0 \tag{6}$$

La relation (6) est dite condition initiale de l'équation différentielle (5) et les éléments t_0 et x^0 sont appelés les valeurs initiales de la solution $x = \varphi(t)$.

Solution générale d'une équation différentielle

On appelle solution générale de l'équation différentielle (5) la fonction $x = \varphi(t, c)$ dépendante de la variable indépendante t et d'une constante c et satisfaisante aux conditions suivantes

(1)• La solution $x = \varphi(t, c)$ satisfait l'équation différentielle pour toutes les valeurs de la constante c.

(2)• Pour toute valeur initiale (t_0, x^0), on peut trouver une valeur $c = c_0$ telle que la fonction $x = \varphi(t, c_0)$ vérifie la condition initiale donnée (6), autrement dit

$$x^0 = \varphi(t_0, c_0).$$

Solution particulière d'une équation différentielle

On appelle solution particulière de l'équation différentielle (5) une solution de cette équation dont laquelle l'unicité a lieu, en particulier toute fonction $x = \phi(t, c_0)$ déduite de la solution générale $x = \phi(t, c)$ en posant $c = c_0$ est une solution particulière.

Solution singulière d'une équation différentielle

On appelle solution singulière de l'équation différentielle (5) une solution de cette équation dont laquelle l'unicité n'a pas lieu.

Problème de Cauchy

On appelle problème initial ou problème de Cauchy pour l'équation différentielle (5) le problème suivant

• Parmi toutes les solutions de l'équation (5) trouver la solution satisfaisante à la condition initiale (6) , et on écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x = x^0 \text{ pour } t = t_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x_{/t=t_0} = x^0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.