§1. Equations différentielles à variables séparées et séparables

Equation différentielle à variables séparées

On appelle équation différentielle à variables séparées toute équation de la forme

$$M(t)dt + N(x)dx = 0, \tag{1}$$

où la solution générale de cette équation est donnée par

$$\int M(t)dt + \int N(x)dx = C. \tag{2}$$

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle à variables séparées suivante

$$\sin t dt + \cos x dx = 0. \tag{3}$$

Solution

La solution générale de l'équation différentielle (3) est donnée comme suit

$$\int \sin t dt + \int \cos x dx = C.$$

ou encore

$$-\cos t + \sin x = C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$ une constante arbitraire.

Equation différentielle à variables séparables

On appelle équation différentielle à variables séparables toute équation de la forme

$$\dot{x} = f(t)g(x), \tag{4}$$

ou encore sous la forme explicite

$$M(t)N(x)dt + P(t)Q(x)dx = 0. \tag{5}$$

Notons que l'équation différentielle (4) se ramène à une équation différentielle à variables séparées. Divisons les deux membres de l'équation différentielle (5) par une expression telle que $P(t)N(x)$ afin d'obtenir des fonctions de la variable en t uniquement par dt et des fonctions de la variable en x uniquement par dx.

$$\frac{M(t)}{P(t)}dt + \frac{Q(x)}{N(x)}dx = 0. \tag{6}$$

La division des deux membres de l'équation (5) par l'expression $P(t)N(x)$ peut entraîner une perte des solutions en t en annulant $P(t)$ et une perte des solutions en x en annulant $N(x)$.

Remarque 1

Il est à noter que l'équation différentielle (5) est différente de l'équation différentielle (6).

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle à variables séparables suivante

$$\dot{x} = \frac{t(x^2-1)}{2xe^{t^2}}, \quad x \neq 0 \tag{7}$$

Mettons l'équation différentielle (7) sous la forme explicite

$$t(x^2-1)dt - 2xe^{t^2}dx = 0. \tag{8}$$

Séparons les variables en divisant l'équation (8) par l'expression

$$(x^2-1)e^{t^2},$$

afin d'obtenir une équation différentielle à variables séparées de la forme suivante

$$\frac{t}{e^{t^2}}dt - \frac{2x}{x^2-1}dx = 0, \quad \text{avec} \ \ x \neq -1 \ \ \text{et} \ \ x \neq 1.$$

Après intégration des deux termes de cette équation, il vient

$$-\frac{1}{2}e^{-t^2} + \ln\left|x^2-1\right| = C.$$

La division des deux membres de l'équation différentielle (8) par l'expression $(x^2-1)e^{t^2}$ entraîne la perte des solutions des fonctions en x

$$x = -1 \ \ \text{et} \ \ x = 1.$$

Il est à remarquer que ces fonctions sont solutions de l'équation (7), d'où la solution générale de l'équation différentielle (7) s'écrit comme suit

$$-\frac{1}{2}e^{-t^2} + \ln\left|x^2-1\right| = C, \quad x = -1, \ x = 1.$$

Equations se ramènent à des équations différentielles à variables séparables

Etant donnée une équation différentielle de la forme

$$\dot{x} = f(ax + bt + c), \tag{9}$$

ce genre d'équations différentielles se ramènent à des équations différentielles à variables séparables par la substitution de l'expression suivante

$$y = ax + bt + c, \tag{10}$$

ou encore

$$y = ax + bt.$$

La dérivée des deux membres de la fonction (10), nous donne

$$\dot{y} = a\dot{x} + b. \tag{11}$$

Remplaçons l'expression de $\dot{x}(t)$ dans l'équation différentielle (9), dans l'équation différentielle (11), on obtient une équation différentielle à variables séparables de la forme

$$\begin{aligned} \dot{y} &= af(ax + bt + c) + b \\ &= af(y) + b \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{dy}{dt} = af(y) + b,$$

d'où, on tire l'équation différentielle à variables séparées

$$\frac{dy}{af(y) + b} = dt.$$

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = x + 2t + 3. \tag{12}$$

Solution

Faisons le changement de variable suivant

$$y = x + 2t + 3. \tag{13}$$

Dérivons les deux membres de l'équation (13), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} + 2 \\ &= y + 2, \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{dy}{dt} = y + 2. \tag{14}$$

Séparons les variables en t et en y en divisant l'équation différentielle (14) par $(y+2)$, on obtient une équation différentielle à variables séparées

$$\frac{dy}{y+2} = dt; \quad \text{avec} \quad y + 2 \neq 0. \tag{15}$$

Après intégration des deux membres de l'équation différentielle (15), il vient

$$\ln|y+2| = t + \ln|C|, \quad \text{avec } C \neq 0,$$

ou encore

$$y = Ce^t - 2.$$

D'où la solution générale de l'équation différentielle (12) en x et en t

$$x = Ce^t - 2t - 5. \tag{16}$$

La division des deux membres de l'équation différentielle (14) par $(y+2)$ entraîne la perte de la solution

$$y = -2,$$

ou encore

$$x = -2t - 5. \tag{17}$$

Notons que la solution (17) peut être obtenue de la solution générale (16) , si l'on convient de prendre pour la constante C n'importe quelle valeur y compris $C = 0$.

§1. Exercices sur les équations différentielles à variables séparées et séparables

Résoudre les équations différentielles à variables séparées et à variables séparables suivantes

1) $txdt + (t+2)dx = 0.$

2) $\sqrt{x^2+3}dt = txdx.$

3) $\sqrt{1-x^2}dt = t^2xdx.$

4) $\dot{x}\cot t + x = 1, \qquad x(0) = 0.$

5) $t\dot{x} - x = x^2, \qquad x(1) = 1.$

6) $\dot{x} = \cos(x-t).$

7) $\dot{x} - 2tx = x^2 + t^2 - 1$

8) $(t+2x)\dot{x} = 1, \qquad x(0) = -1.$

9) $\dot{x} = \sqrt{t+x+1}.$

10) $\Big(\dot{x} - 1\Big)\ln(-t+x+1) = 1.$

§1. Réponses des équations différentielles à variables séparées et séparables

1) $x = C(t+2)^2 e^{-t}$; $t = -2$.

2) $\ln|t| = C + \sqrt{x^2+3}$; $t = 0$.

3) $t\sqrt{1-x^2} + Ct = 1$; $t = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

4) $x = 1 + C\cos t$; $x = 1 - \cos t$.

5) $x(C-t) = t$; $x = -1$; $t = 0$; $x = 0$; $x(2-t) = t$.

6) $\cot\dfrac{x-t}{2} = t + C$; $x - t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7) $(x+t)(C+t) = -1$; $x = -t$.

8) $t + 2x + 2 = Ce^x$; $t + 2x + 2 = 0$.

9) $\sqrt{t+x+1} - \ln(\sqrt{t+x+1}+1) = 2t + C$.

10) $(-t+x+1)(\ln(-t+x+1) - 1) = t + C$.

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 Algeria
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr