§1. Equations à variables séparées et séparables

Equation à variables séparées

On appelle équation à variables séparées toute équation de la forme

$$M(t)dt + N(x)dx = 0, \tag{1}$$

où la solution générale de cette équation est donnée par

$$\int M(t)dt + \int N(x)dx = C. \tag{2}$$

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle à variables séparées suivante

$$\sin t dt + \cos x dx = 0.$$

Solution

La solution générale de l'équation est donnée comme suit

$$\int \sin t dt + \int \cos x dx = C.$$

ou encore

$$-\cos t + \sin x = C,$$

avec C une constante arbitraire.

Equation à variables séparables

On appelle équation à variables séparables toute équation de la forme

$$\dot{x} = f(t)g(x),$$

ou encore sous la forme explicite

$$M(t)N(x)dt + P(t)Q(x)dx = 0. \tag{3}$$

Notons que cette équation se ramène à une équation à variables séparées si on divise les deux membres de l'équation (3) par une expression telle que

$P(t)N(x)$ afin d'obtenir des fonctions de la variable en t uniquement par dt et des fonctions de la variable en x uniquement par dx.

$$\frac{M(t)}{P(t)}dt + \frac{Q(x)}{N(x)}dx = 0. \tag{4}$$

La division des deux membres de l'équation (3) par l'expression $P(t)N(x)$ peut entraîner une perte de solutions en t en annulant $P(t)$ et une perte de solutions en x en annulant $N(x)$.

Remarque 1

Il est à noter que l'équation différentielle (4) est différente de l'équation différentielle (3).

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle à variables séparables suivante

$$\dot{x} = \frac{t(x^2-1)}{2x \exp t^2}, \quad x \neq 0 \tag{5}$$

Mettons l'équation (5) sous la forme explicite

$$t(x^2-1)dt - 2x \exp t^2 dx = 0. \tag{6}$$

Séparons les variables en divisant l'équation (6) par l'expression

$$(x^2-1)\exp t^2,$$

afin d'obtenir une équation à variables séparées de la forme suivante

$$\frac{t}{\exp t^2}dt - \frac{2x}{x^2-1}dx = 0, \quad \text{avec} \quad x \neq -1 \quad \text{et} \quad x \neq 1.$$

Après intégration des deux termes de cette équation, il vient

$$-\frac{1}{2}\exp(-t^2) + \ln \mid x^2 - 1 \mid = C.$$

La division des deux membres de l'équation différentielle (6) par l'expression $(x^2-1)\exp t^2$ entraîne la perte des solutions des fonctions en x

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = 1.$$

Il est à remarquer que ces fonctions sont solutions de l'équation (5), d'où la solution générale de l'équation différentielle s'écrit comme suit

$$-\frac{1}{2}\exp(-t^2) + \ln \mid x^2 - 1 \mid = C, \quad x = -1, \; x = 1.$$

Equations se ramènent à des équations à variables séparables

Les équations de la forme

$$\dot{x} = f(ax + bt + c),$$

se ramènent à des équations à variables séparables par la substitution de l'expression suivante

$$y = ax + bt + c, \tag{7}$$

ou encore

$$y = ax + bt.$$

La dérivée des deux membres de la fonction (7), donne

$$\dot{y} = a\dot{x} + b. \tag{8}$$

Remplaçons l'expression de $\dot{x}(t)$ dans équation (8), on obtient une équation à variables séparables de la forme

$$\dot{y} = af(y) + b,$$

d'où, on tire l'équation à variables séparées

$$\frac{dy}{(af(y) + b)} = dt.$$

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = x + 2t + 3. \tag{9}$$

Solution

Soit y une nouvelle fonction donnée par

$$y = x + 2t + 3,$$

dérivons les deux membres de cette expression, on obtient

$$\dot{y} = \dot{x} + 2 = y + 2$$

ou encore

$$(y + 2)dt - dy = 0 \tag{10}$$

Séparons les variables en t et en y en divisant par $(y + 2)$, on obtient une équation différentielle à variables séparées

$$\frac{dy}{y+2} = dt; \quad (\text{ avec } y + 2 \neq 0).$$

Après intégration des deux membres de cette équation, il vient

$$\ln \mid y + 2 \mid - \ln \mid C \mid = t, \quad \text{avec } C \neq 0,$$

ou encore

$$y = -2 + C \exp t.$$

D'où la solution générale de l'équation (9) en x et en t

$$x = -2t - 5 + C \exp t. \tag{11}$$

La division des deux membres de l'équation (10) par $(y + 2)$ entraîne la perte de la solution

$$y = -2 \Rightarrow x = -2t - 5.$$

Mais cette solution peut être obtenue de l'équation (11) , si l'on convient de prendre pour la constante C n'importe quelle valeur y compris $C = 0$.

§1. Exercices sur les équations à variables séparées et séparables

Résoudre les équations différentielles à variables séparées et à variables séparables suivantes

1) $txdt + (t+2)dx = 0.$

2) $\sqrt{x^2+3}dt = txdx.$

3) $\sqrt{1-x^2}dt = t^2xdx.$

4) $\dot{x}\cot t + x = 1, \qquad x(0) = 0.$

5) $t\dot{x} - x = x^2, \qquad x(1) = 1.$

6) $\dot{x} = \cos(x-t).$

7) $\dot{x} - 2tx = x^2 + t^2 - 1$

8) $(t+2x)\dot{x} = 1, \qquad x(0) = -1.$

9) $\dot{x} = \sqrt{t+x+1}.$

10) $(\dot{x}-1)\ln(-t+x+1) = 1.$

§1. Réponses des équations à variables séparées et séparables

1) $x = C(t+2)^2 \exp(-t); \;\; t = -2.$

2) $\ln \mid t \mid = C + \sqrt{x^2+3}; \;\; t = 0.$

3) $t\sqrt{1-x^2} + Ct = -1; \;\; t = 0, \; x = -1, \; x = 1.$

4) $x = 1 + C\cos t; \;\; x = 1 - \cos t.$

5) $x(C - t) = t; \;\; x = -1; \;\; t = 0; \; x = 0; \; x(2-t) = t.$

6) $\cot \dfrac{x-t}{2} = t + C; \;\; x - t = 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$

7) $(x+t)(C+t) = -1; \; x = -t.$

8) $t + 2x + 2 = C \exp x; \;\; t + 2x + 2 = 0.$

9) $\sqrt{t+x+1} - \ln(\sqrt{t+x+1} + 1) = 2t + C.$

10) $(-t+x+1)[\ln(-t+x+1) - 1] = t + C.$

Bibliographie

[1] **F. AYRES.** Theory and problems of differential equations. Megraw-Hill 1952

[2] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[3] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[4] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[5] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures. Dunod Paris 1960.

[6] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.